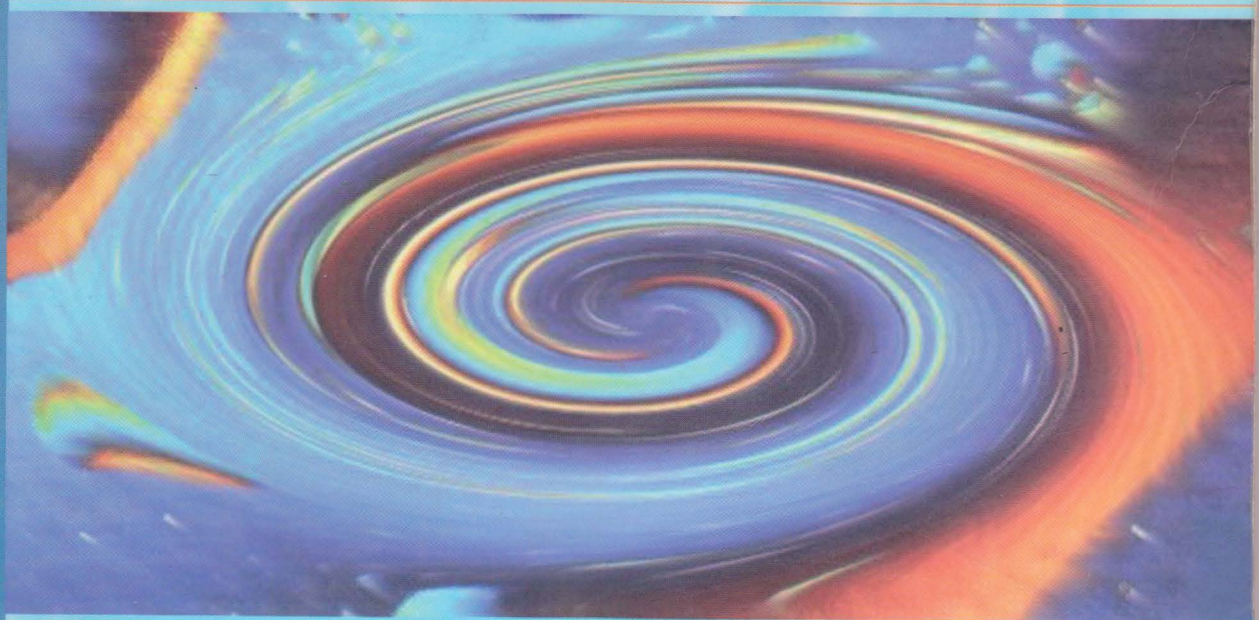
MINISTERUL EDUCAȚIEI ȘI CERCETĂRII

RODICA IONESCU-ANDREI
CRISTINA ONEA
ION TOMA

Fizică F1

MANUAL PENTRU CLASA A XI-A



ART
Grup Editorial

MINISTERUL EDUCAŢIEI ŞI CERCETĂRII

FIZICĂ

manual pentru clasa a XI-a

ART
grup editorial

Capitolul I

OSCILAȚII ȘI UNDE MECANICE

1.1 OSCILATORUL MECANIC

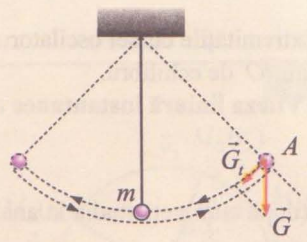
1.1.1 Fenomene periodice. Procese oscilatorii în natură și în tehnică

În viața de toate zilele întâlnim deseori mișcări în care un sistem mecanic, scos din poziția sa de echilibru și lăsat liber, este readus în acea poziție cu o anumită viteză, sub acțiunea unei *forțe de revenire*; de aici, datorită *inerției*, el își continuă mișcarea în sens opus. Corpul este adus din nou de către forța de revenire în poziția de echilibru, de unde mișcarea continuă datorită inerției.

Mișcarea de dus-întors efectuată de o parte și de cealaltă a poziției de echilibru poartă numele de ***oscilație*** *sau vibrație.*

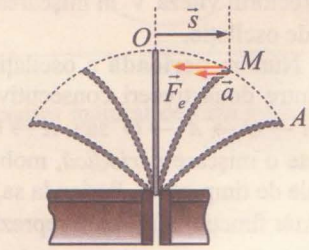
Un exemplu cunoscut este mișcarea pendulului constituit dintr-un corp de masă m suspendat de un fir inextensibil (fig. 1.1). În poziția de echilibru (O), corpul atârnă de firul vertical. Când este scos din această poziție și apoi eliberat (din poziția A, spre exemplu), corpul începe să oscileze de o parte și de alta a poziției de echilibru, descriind un arc de cerc, într-un mod regulat și care se repetă. Forța care face corpul să revină de fiecare dată spre poziția de echilibru este componenta tangențială a greutății, $\vec{G}_t$. Ea joacă rol de forță de revenire. Masa m a corpului, măsură a inerției acestuia, determină continuarea oscilației la fiecare trecere prin poziția de echilibru.

Fig. 1.1



Un alt exemplu de sistem mecanic oscilant este o lamă elastică de oțel fixată cu un capăt într-o menghină (fig. 1.2). Deplasând lateral capătul superior și eliberându-l, lama începe să vibreze (oscileze) în jurul poziției verticale de echilibru. Pentru orice poziție instantanee M, forța de revenire este forța elastică ce ia naștere în lama deformată și este orientată spre poziția ei de echilibru. Cum forța elastică depinde de deformare, iar aceasta variază în timpul oscilației, ne așteptăm ca și accelerația pe care forța de revenire o imprimă lamei să depindă de deformare. Cu cât lama se îndepărtează mai mult de poziția de echilibru, deci cu cât deformarea ei (săgeata) $\vec{s}$ este mai mare, cu atât forța elastică și accelerația sunt mai mari în modul. Remarcați că atât sensul forței elastice, cât și sensul accelerației sunt opuse sensului deformării $\vec{s}$.

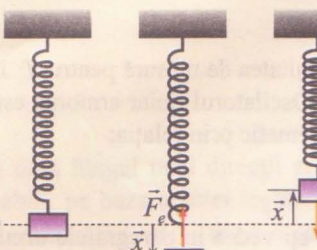
Fig. 1.2



Când lama se îndepărtează de poziția de echilibru, mișcarea ei este încetinită, astfel că la capătul cursei viteza oscilatorului se anulează. În acest moment, forța elastică este maximă și accelerația de asemenea. Revenirea la poziția de echilibru este o mișcare accelerată (viteza și accelerația având același sens). Viteza devine maximă la trecerea prin poziția de echilibru, poziție în care forța de revenire și accelerația se anulează. Mișcarea continuă în sens opus, încetinită la dus și accelerată la întoarcere.

O mișcare oscilatorie liniară (rectilinie) efectuează și corpul din fig. 1.3, suspendat de un resort elastic de masă neglijabilă. Și aici forța de revenire este forța elastică.

Fig. 1.3



Studiul acestui oscilator elastic va face obiectul unui paragraf special.

Putem menționa multe alte exemple de oscilatori mecanici: balansierul unui ceas, pistonul unui motor cu ardere internă, corzile unui instrument muzical, nodurile (atomii, ionii) rețelei cristaline a unui corp solid care vibrează în jurul pozițiilor lor de echilibru etc. Inima este de asemenea un sistem oscilant. Toate instrumentele muzicale comportă, așa cum veți vedea în paragraful de acustică, sisteme oscilante.

1.1.2 Mărimi caracteristice mişcării oscilatorii

Vom studia mai întâi oscilatorii mecanici – sisteme închise – care au suferit o perturbaţie iniţială (scoatere din poziţia de echilibru, comunicarea unui impuls din exterior), fiind apoi lăsaţi să oscileze liber fără nici o altă influenţă. Astfel de oscilatori efectuează oscilaţii *libere* numite şi oscilaţii *proprii*.

Vom aborda studiul sistemelor oscilatorii libere pe modelul simplificat al unui *punct material* care oscilează *liniar armonic*. Din punct de vedere cinematic, *vom caracteriza* **mişcarea oscilatorie liniar armonică** prin:

Fig. 1.4

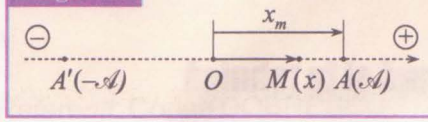
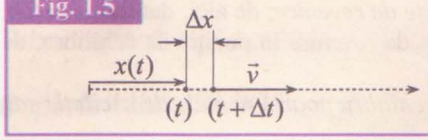


Fig. 1.5



• *direcţia de mişcare* a oscilatorului (punctul material), căreia îi ataşăm o axă de coordonate Ox, de obicei cu originea în poziţia de echilibru a oscilatorului, axă pe care vom considera un sens pozitiv de deplasare;

• *poziţia instantanee* M a oscilatorului este reperată faţă de poziţia de echilibru prin vectorul de poziţie $\overrightarrow{OM}$. Proiecţia acestuia pe axa Ox reprezintă ***elongaţia*** **oscilaţiei,** x. Aceasta ia, în mod alternativ, valori pozitive şi negative prin deplasarea oscilatorului de o parte şi de alta a originii axei.

Poziţiei de echilibru O îi corespunde $x=0$. Dependenţa de timp a elongaţiei $x=x(t)$ reprezintă **legea** sau **ecuaţia de mişcare a oscilatorului.**

Experienţa arată că mişcarea oscilatorie este limitată la un interval de lungime ale cărui extremităţi sunt simetrice faţă de poziţia de echilibru. Vom numi **amplitudine** a oscilaţiei liniare armonice *valoarea maximă a elongaţiei* sale şi o vom nota cu $\mathcal{A}$:

$$\mathcal{A} = x_{max} \tag{1}$$

Extremităţile cursei oscilatorului sunt punctele A de abscisă $\mathcal{A}$ şi respectiv A' de abscisă $-\mathcal{A}$, simetrice faţă de poziţia O de echilibru.

• **Viteza liniară instantanee** a oscilatorului se defineşte prin:

$$v \overset{def}{=} \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} \,. \tag{2}$$

având (după cum veţi studia la analiza matematică) semnificaţia de *derivată* în raport cu timpul t a funcţiei $x(t)$ la momentul t, notată:

$$v = \frac{dx}{dt} = \dot{x} \tag{3}$$

Vectorul viteză $\vec{v}$ în mişcarea oscilatorie liniar armonică îşi modifică sensul în mod periodic, la fiecare capăt al cursei de oscilaţie.

• Numim **perioadă** a oscilaţiei intervalul de timp T necesar efectuării unei oscilaţii complete, adică timpul scurs între două treceri consecutive ale oscilatorului prin aceeaşi poziţie şi în acelaşi sens. De exemplu, drumul $O \to A \to O \to A' \to O$ sau $A \to O \to A' \to O \to A$ constituie oscilaţii complete. Mişcarea oscilatorie liniar armonică este o mişcare *periodică*, mobilul trecând consecutiv prin aceeaşi poziţie, în acelaşi sens şi cu aceeaşi viteză la intervale de timp egale. Perioada sa, T, este o mărime constantă.

Atât funcţia $x(t)$, care reprezină ecuaţia de mişcare, cât şi funcţia $v(t)$, reprezentând legea vitezei în mişcarea oscilatorie liniar-armonică, sunt *funcţii periodice* de timp:

$$x(t) = x(t+kT) \tag{4}$$

$$v(t) = v(t+nT) \tag{5}$$

unde $k, n \in \mathbb{N}$.

• Inversul perioadei reprezintă **frecvenţa oscilaţiei**, adică numărul de oscilaţii efectuate în unitatea de timp:

$$\upsilon = \frac{1}{T} \tag{6}$$

Unitatea de măsură pentru T în SI este secunda, iar pentru frecvenţă este s^{-1} (Hertz).

• Oscilatorul liniar armonic este adesea caracterizat prin mărimea **frecvenţă unghiulară** sau **pulsaţie**, ω, definită cinematic prin relaţia:

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi\upsilon \text{ (rad/s)} \tag{7}$$

Veţi vedea în paragrafele următoare că pulsaţia este legată de proprietăţile fizice ale oscilatorului. Pătratul său, ω^2, reprezintă intensitatea forţei de revenire raportată la valoarea deformării (elongaţiei) şi la masa oscilatorului.

• **Acceleraţia** instantanee a oscilatorului este, conform definiţiei studiate în clasa a IX-a:

$$a \overset{def}{=} \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta t} \tag{8}$$

având semnificaţia derivatei vitezei la momentul t, notată:

$$a = \frac{dv}{dt} = \dot{v} \tag{9}$$

Dacă ţinem cont de (3) atunci acceleraţia momentană reprezintă derivata a doua a coordonatei de poziţie, x, la momentul respectiv de timp, notată:

$$a = \frac{d^2x}{dt^2} = \ddot{x} \tag{10}$$

Prin definiţie, mişcarea oscilatorie liniară este armonică dacă acceleraţia mobilului este în orice moment proporţională şi de sens contrar cu elongaţia:

$$a = -\omega^2 x \tag{11}$$

constanta de proporţionalitate fiind egală cu pătratul pulsaţiei.

Relaţia (11) reprezintă *condiţia de armonicitate*, definitorie pentru acest model de oscilator. Oscilatorul armonic serveşte drept model exact sau aproximativ pentru tratarea multor mişcări periodice din fizica clasică şi fizica microobiectelor (cuantică).

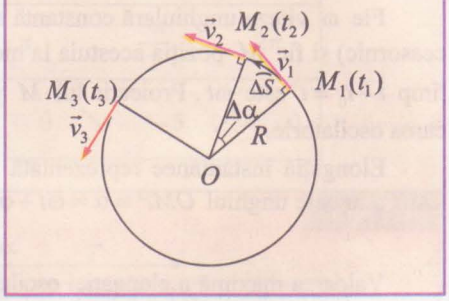
1.1.2.1 Cinematica mişcării oscilatorii liniar armonice

Singura mişcare periodică pe care ai studiat-o în clasa a IX-a este *mişcarea circulară uniformă*. Să ne reamintim că mobilul aflat în mişcare circulară uniformă parcurge arce de cerc egale în intervale de timp egale, adică viteza lui liniară v este constantă în modul. Vectorul *viteză liniară* $\vec{v}$, tangent în fiecare moment la traiectoria circulară, îşi modifică în mod continuu orientarea. Acceleraţia mişcării, datorată exclusiv variaţiei orientării vitezei, se numeşte centripetă şi are expresia:

$$a_{cp} = \frac{v^2}{R} \tag{1}$$

unde R – raza traiectoriei.

Fig. 1.6



Perioada T, reprezentând intervalul de timp în care mobilul efectuează o rotaţie completă, este constantă.

Viteza unghiulară ω a mişcării circulare uniforme reprezintă unghiul la centru măturat de raza vectoare R în unitatea de timp:

$$\omega = \frac{\Delta\alpha}{\Delta t} \tag{2}$$

Viteza unghiulară se măsoară în rad s^{-1} şi este constantă în timp.

Modulul vitezei liniare şi viteza unghiulară sunt legate prin relaţia:

$$v = \omega \cdot R \tag{3}$$

Frecvenţa mişcării circulare υ, reprezintă numărul de oscilaţii efectuate în unitatea de timp:

$$\upsilon = \frac{1}{T} \tag{4}$$

şi se măsoară în s^{-1} = Hz (Hertz)

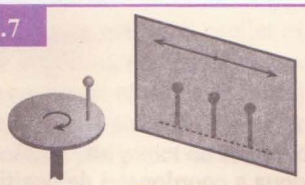
Între frecvenţă şi viteza unghiulară se stabileşte relaţia:

$$\omega = 2\pi\upsilon = \frac{2\pi}{T} \tag{5}$$

Să vedem care este legătura dintre mişcarea oscilatorie liniar armonică de-a lungul unei direcţii şi mişcarea circulară uniformă, având în vedere periodicitatea amândurora. Vom putea stabili, pe baza acestei legături, *ecuaţia mişcării liniar armonice* $x(t)$, ecuaţia vitezei $v(t)$ şi dependenţa de timp a acceleraţiei $a(t)$, dând o interpretare geometrică pulsaţiei (frecvenţei unghiulare) oscilaţiei armonice.

EXPERIMENT

Fig. 1.7

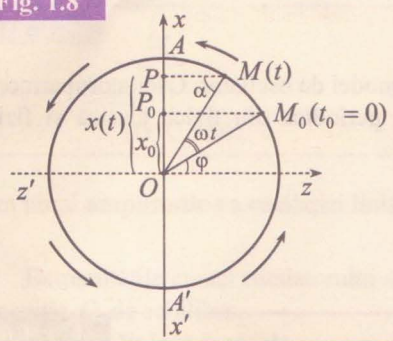


La marginea platoului unei centrifuge manuale, instalați o tijă verticală cu o bilă în vârf (fig. 1.7). Faceți întuneric în sală și plasați centrifuga în apropierea unui perete sau ecran. De la o distanță oarecare luminați tija cu un fascicul paralel de lumină de la un aparat de proiecție. Urmăriți mișcarea umbrei bilei pe perete în timpul rotirii cu turație constantă a platoului. Este aceasta o mișcare oscilatorie liniară? Dar armonică?

Ecuația de mișcare a oscilatorului liniar-armonic

Vom demonstra că proiecția mișcării circulare uniforme pe direcția unuia dintre diametrele cercului (sau pe o direcție coplanară cu traiectoria circulară) este o mișcare oscilatorie armonică.

Fig. 1.8



Fie $x'Ox$ o axă de coordonate pe direcția diametrului AA' al cercului de rază R, descris de un mobil în mișcare circulară uniformă (fig. 1.8). În timp ce acesta descrie cercul, proiecția sa pe axă descrie o mișcare oscilatorie liniară în jurul poziției centrale O, între extremitățile A și A' ale diametrului.

Fie M_0 poziția mobilului la momentul inițial, $t_0 = 0$, reperabilă prin unghiul la centru φ pe care raza vectoare $\overrightarrow{OM_0}$ îl face cu direcția Oz, ortogonală pe Ox.

Proiecția P_0 a punctului M_0 pe axa Ox va constitui *poziția inițială* în mișcarea oscilatorie liniară. Elongația corespunzătoare poziției inițiale:

$$\overrightarrow{OP_0} \equiv x_0 = R\sin\varphi \qquad (1)$$

Fie ω viteza unghiulară constantă a mobilului ce descrie cercul în sens pozitiv trigonometric (invers acelor de ceasornic) și fie M poziția acestuia la momentul $t(t > t_0)$. Unghiul la centru descris de raza vectoare în intervalul de timp $t - t_0 = t$ este ωt. Proiecția lui M pe axa Ox este punctul P. Acesta constituie poziția la momentul t în mișcarea oscilatorie.

Elongația instantanee reprezentată de segmentul $\overline{OP}$ se calculează trigonometric din triunghiul dreptunghic OMP, în care unghiul $OMP \equiv \alpha = \omega t + \varphi$. Se obține:

$$x(t) = \overline{OP} = \overline{OM}\sin\alpha = R\sin(\omega t + \varphi) \qquad (2)$$

Valoarea maximă a elongației oscilației se obține când M ajunge în extremitatea A a diametrului; în acest moment, proiecția lui M se află, de asemenea, în A. Rezultă că amplitudinea oscilației este egală cu raza R a cercului:

$$x_{max} \equiv \mathcal{A} = R \qquad (3)$$

Ecuația mișcării oscilatorii liniare obținută prin proiectarea descrisă se va scrie:

$$x(t) = \mathcal{A}\sin(\omega t + \varphi) \qquad (4)$$

unde φ, conform (1) și (3), va fi dat de relația:

$$\varphi = \arcsin\frac{x_0}{\mathcal{A}} \qquad (5)$$

Argumentul funcției sinus din ecuația (4), unghiul $(\omega t + \varphi)$, se numește **unghi de fază** sau pe scurt **faza mișcării** la momentul t.

La momentul inițial $t_0 = t$, faza mișcării este unghiul φ, numit **fază inițială** (sau fază la originea timpului).

Din punct de vedere matematic, funcția sinusoidală (4) ce descrie mișcarea oscilatorie este continuă pe intervalul $t \in [0, \infty)$, mărginită (ia valori între limitele $x_{max} = \mathcal{A}$ și $x_{min} = -\mathcal{A}$) și periodică. Perioada oscilației obținute prin proiecție este evident egală cu cea a mișcării circulare. Mobilul M și oscilatorul P ajung simultan în extremitățile diametrului, așa încât în timpul în care mobilul M efectuează o rotație completă, proiecția sa P efectuează o oscilație completă.

Frecvența oscilatorului este și ea egală cu frecvența υ a mișcării circulare. Frecvența unghiulară (pulsația) a oscilatorului reprezintă viteza unghiulară ω a mobilului în mișcare circulară, aflându-se în aceeași relație cu perioada T:

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi\upsilon \qquad (6)$$

Periodicitatea se verifică imediat în baza periodicității funcției sinus:

$$x(t+kT)=\mathcal{A}\sin\left[\frac{2\pi}{T}(t+kT)+\varphi\right]=\mathcal{A}\sin\left(2\pi\frac{t}{T}+2k\pi+\varphi\right)=$$
$$=\mathcal{A}\sin\left(\frac{2\pi t}{T}+\varphi\right)=\mathcal{A}\sin(\omega t+\varphi)=x(t) \qquad (7)$$

Tot pe baza periodicității vom alcătui, în vederea trasării graficului, tabelul de variație a funcției $x(t)$ doar pentru prima perioadă de oscilație, $t\in[0,\infty)$, știind că valorile ei se repetă ca mărime, direcție și sens de variație după o perioadă sau un multiplu întreg al acesteia.

Exemplu aplicativ 1

Enunț: Trasați graficul dependenței de timp a elongației unui oscilator liniar descris de ecuația:

$$x_1(t)=5\sin\frac{\pi t}{2}\ (\text{cm}) \qquad (8)$$

Soluție: Amplitudinea oscilației este $\mathcal{A}=5$ cm, pulsația $\omega=\frac{\pi}{2}$ rad$\cdot s^{-1}$, iar faza la originea timpului, $\varphi=0$.

Perioada oscilației, $T=\frac{2\pi}{\omega}=4$ s.

Alcătuim tabelul de variație pentru o perioadă.

t (s)	0	$\frac{T}{8}=0,5$	$\frac{T}{4}=1$	$\frac{T}{2}=2$	$\frac{3T}{4}=3$	$T=4$
faza: $\alpha=\frac{\pi t}{2}$	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$x_1=5\sin\frac{\pi t}{2}$ (cm)	0 ↗	$\frac{5\sqrt{2}}{2}$ ↗	5 ↘	0 ↘	−5 ↗	0

Graficul funcției $x(t)$ este redat prin sinusoida din fig. 1.9, obținută prin extinderea, în baza periodicității, a domeniului de la $t\in[0,T]$ la $t\in[0,\infty)$.

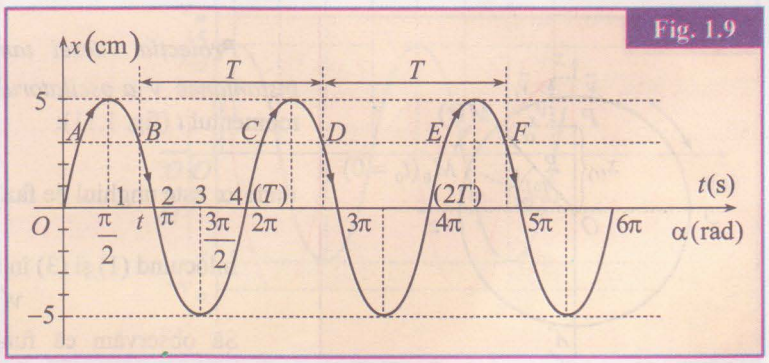


Fig. 1.9

Ordonata la originea timpului, având semnificația de poziție inițială a oscilatorului, este în acest caz nulă, $x_{01}=0$. Oscilatorul se află la momentul inițial în poziție de echilibru, căci faza la origine $\varphi=0$.

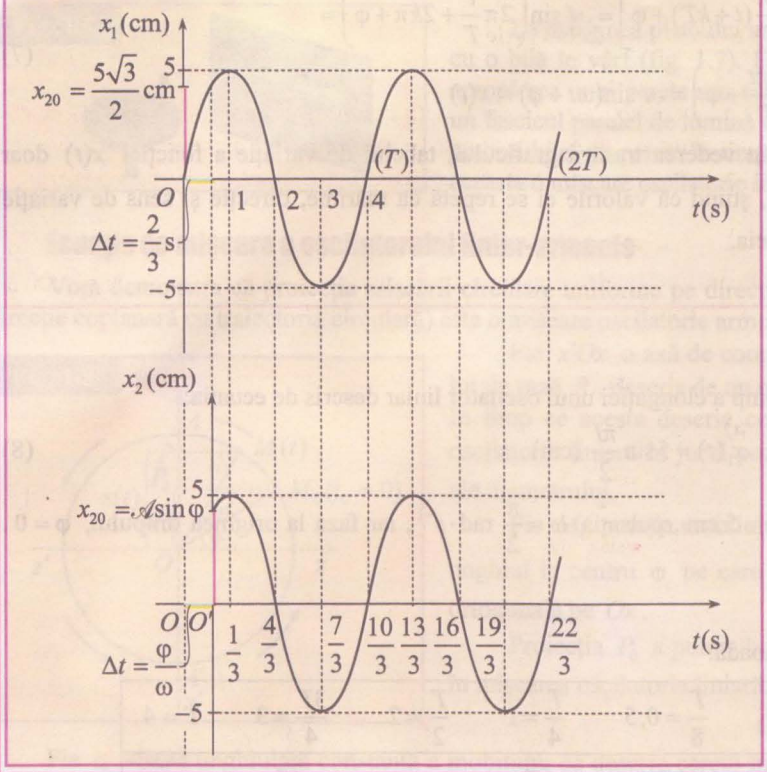
Să observăm că punctele B,D,F din grafic,corespunzând aceleiași valori x a elongației, dar și aceluiași sens de variație (descrescător) al acesteia, sunt separate prin intervale temporale egale cu o perioadă sau un multiplu întreg al acesteia. Deși punctele A și B (sau A și D etc.) corespund și ele aceleiași valori a elongației, x, ele diferă prin sensul de variație a elongației: pentru A, elongația crește, iar pentru B sau D elongația descrește. Prin urmare, $t_B-t_A\neq T$ (respectiv $t_D-t_A\neq kT, k\in\mathbb{N}$).

Exemplu aplicativ 2

Enunț: Reprezentați acum graficul dependenței de timp a elongației oscilatorului descris de ecuația:

$$x_2(t)=5\sin\left(\frac{\pi}{2}t+\frac{\pi}{3}\right)\ (\text{cm}) \qquad (9)$$

Fig. 1.10



Soluție: Să observăm că amplitudinea și pulsația oscilatorului sunt aceleași ca în prima aplicație. Cele două oscilații diferă prin faza la originea timpului. În al doilea caz, aceasta are valoarea:

$$\varphi = \frac{\pi}{3} \qquad (10)$$

ceea ce înseamnă că față de prima oscilație, aceasta este *defazată în avans* cu $\frac{\pi}{3}$ rad. Graficul lui $x_2(t)$ se obține din primul grafic printr-o translație (fig. 1.10) în lungul axei timpului, echivalentă cu decalajul temporal dintre cei doi oscilatori:

$$\Delta t = \frac{\varphi}{\omega} = \frac{\varphi}{2\pi}\cdot T = \frac{T}{6} = \frac{2}{3}\ \text{s} \qquad (11)$$

Ordonata la originea timpului, adică poziția inițială a oscilatorului, va fi în acest caz:

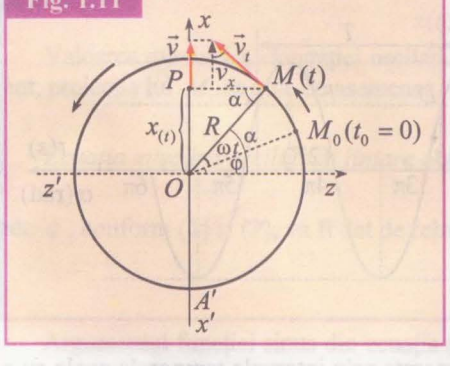
$$x_{02} = \mathcal{A}\sin\varphi = \frac{5\sqrt{3}}{2}\ \text{cm} \qquad (12)$$

Ecuația vitezei oscilatorului liniar

Viteza liniară $\vec{v}_t$ în mișcarea circulară uniformă este tangentă la cerc în punctul M, unde se află mobilul la momentul de timp t, iar modulul său păstrează valoarea constantă:

$$v_t = \omega R = \omega\mathcal{A} \qquad (1)$$

Fig. 1.11



Proiecția vitezei tangențiale $\vec{v}_t$ *pe axa* Ox *reprezintă viteza instantanee* v *a oscilatorului liniar*, aflat în poziția P de elongație x, la momentul t (fig. 1.11):

$$v = v_x = v_t\cos\alpha \qquad (2)$$

unde α este unghiul de fază la momentul t:

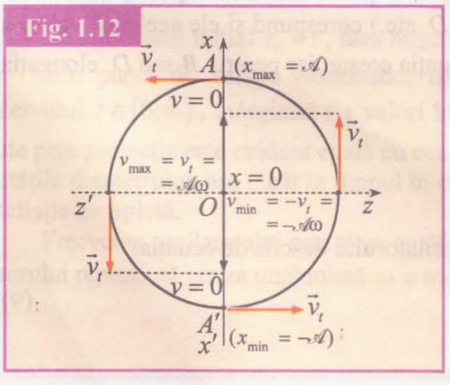
$$\alpha = \omega t + \varphi \qquad (3)$$

Înlocuind (1) și (3) în (2) obținem ecuația vitezei:

$$v(t) = \mathcal{A}\omega\cos(\omega t + \varphi) \qquad (4)$$

Să observăm că funcția $v(t)$ este continuă și periodică pentru $t \in [0,\infty)$, ca și $x(t)$.

Fig. 1.12



Valorile extreme ale vitezei în mișcarea oscilatorie ($v_{max} = \mathcal{A}\omega$ și respectiv $v_{min} = -\mathcal{A}\omega$) sunt atinse la trecerea oscilatorului prin poziția centrală O (fig. 1.12), într-un sens și în altul, iar anularea vitezei de oscilație are loc în pozițiile extreme ale cursei, A și A', în care elongația atinge valorile maxime $\mathcal{A}$ și respectiv $-\mathcal{A}$.

Oricum, ne așteptăm la acest defazaj între viteza $v(t)$ și elongația corespunzătoare, $x(t)$, ele fiind descrise matematic prin funcții sinus și cosinus ale aceluiași argument, între care există relația cunoscută:

$$\cos(\omega t + \varphi) = \sin\left(\omega t + \varphi + \frac{\pi}{2}\right) \qquad (5)$$

Rezultă că *viteza* oscilatorului liniar este, în orice moment de timp, *defazată* cu $\frac{\pi}{2}$ radiani (90°) *în avans* față de elongație. Se spune că viteza este în **cuadratură avans față de elongație.**

Observație

Analitic, știm de la matematică, că în orice punct de extrem al unei funcții continue și derivabile derivata sa de ordin I se anulează. Ținând cont că $x = \pm\mathcal{A}$ sunt puncte de maxim, respectiv minim ale elongației și că *derivata* acesteia în raport cu timpul reprezintă *viteza* în punctele (la momentele) respective, deducem că viteza se anulează în pozițiile extreme ale cursei oscilatorului.

$$x_m = \pm\mathcal{A} \Rightarrow v = 0 \qquad (6)$$

Viteza oscilatorului este pozitivă în jumătatea de perioadă corespunzătoare deplasării de la A' la A și negativă în jumătatea de perioadă destinată deplasării de la A spre A'.

Reprezentarea grafică a vitezei ca funcție de timp ilustrează alternanța semnului vitezei și defazajul acesteia în raport cu elongația.

Pentru oscilatorul:

$$x_1(t) = 5\sin\frac{\pi}{2}t \ \text{(cm)}$$

din exemplul 1, viteza are forma analitică

$$v_1(t) = \frac{5\pi}{2}\cos\frac{\pi}{2}\cdot t \ \text{(cm/s)}$$

și reprezentarea grafică din fig. 1.13.a.

Pentru oscilatorul:

$$x_2(t) = 5\sin\left(\frac{\pi}{2}t + \frac{\pi}{3}\right) \ \text{(cm)},$$

graficul dependenței vitezei

$$v_2(t) = \frac{5\pi}{2}\cos\left(\frac{\pi}{2}t + \frac{\pi}{3}\right) \ \text{(cm/s)}$$

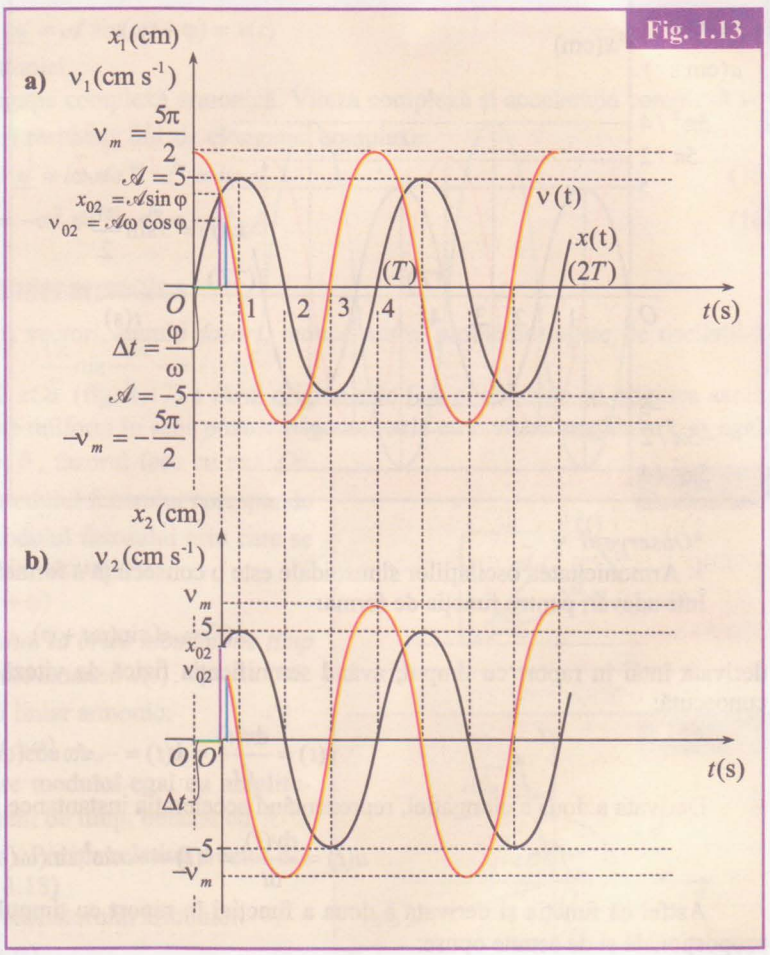
este ilustrat în fig. 1.13.b. Remarcați că ordonata la originea timpului reprezintă *viteza inițială* a oscilatorului:

$$v_0 = v(t_0 = 0) = \mathcal{A}\omega\cos\varphi \qquad (7)$$

$$v_{01} = \frac{5\pi}{2} \ \text{cm s}^{-1}$$

$$v_{02} = \frac{5\pi}{4} \ \text{cm s}^{-1}$$

Fig. 1.13



Accelerația oscilatorului liniar

Obținem expresia accelerației oscilatorului la momentul t prin proiectarea accelerației instantanee centripete a mobilului M în mișcare circulară uniformă (fig. 1.14).

Cum

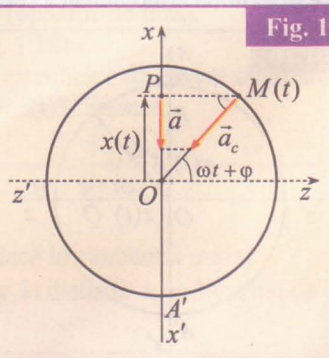
$$a_c = \frac{v_t^2}{R} = \omega^2 R = \omega^2\mathcal{A} \qquad (1)$$

rezultă:

$$a = -a_c\sin(\omega t + \varphi) = -\omega^2\mathcal{A}\sin(\omega t + \varphi) \qquad (2)$$

Este de remarcat faptul că la orice moment de timp, vectorul de poziție $\overrightarrow{OP}$ al oscilatorului și vectorul accelerație $\vec{a}$ sunt de sensuri opuse.

Fig. 1.14



Aceasta revine la a spune că *accelerația $a(t)$ și elongația $x(t)$ sunt în orice moment de semne contrare.*

Comparând ecuația mișcării oscilatorii studiate:

$$x(t) = \mathcal{A}\sin(\omega t + \varphi) \tag{3}$$

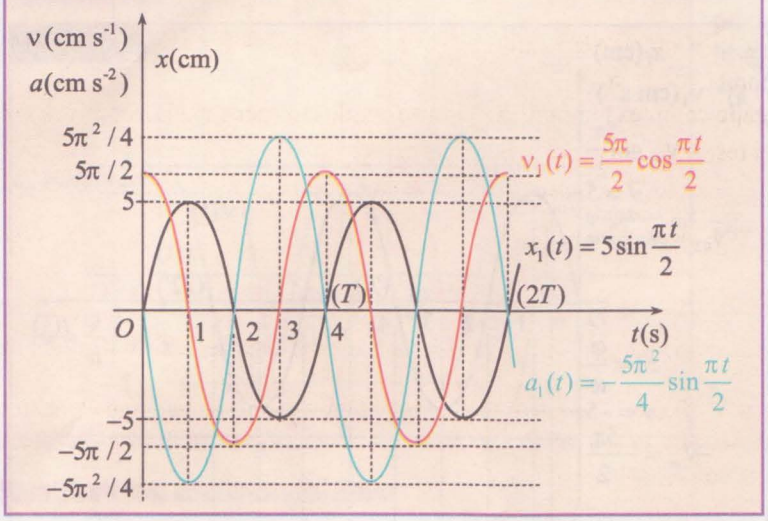
cu expresia accelerației dată de (2) ajungem la relația:

$$a = -\omega^2 x \tag{4}$$

Faptul că accelerația mișcării oscilatorii liniare este în orice moment proporțională cu elongația și de sens contrar acesteia face că această mișcare să fie **armonică.**

Accelerația oscilației liniar-armonice obținute prin proiectarea mișcării circulare uniforme este defazată față de elongație cu π radiani (180°):

Fig. 1.15



$$a(t) = -\omega^2 \mathcal{A}\sin(\omega t + \varphi) = \omega^2 \mathcal{A}\sin(\omega t + \varphi + \pi) \tag{5}$$

iar față de viteză cu $\frac{\pi}{2}$ radiani în avans. Spunem că **accelerația este în opoziție de fază cu elongația și în cuadratură avans față de viteză.**

Aceste defazaje sunt puse în evidență și prin compararea graficelor accelerației, vitezei și elongației ca funcții de timp, trasate în același sistem de axe (fig. 1.15).

Accelerația devine maximă ($\mathcal{A}\omega^2$) când elongația este minimă ($-\mathcal{A}$) și invers. Ambele mărimi se anulează simultan, la trecerea oscilatorului prin poziția centrală O ($x = 0,\ a = 0$).

**Observații*

1. Armonicitatea oscilațiilor sinusoidale este o consecință a formei lor analitice.

Într-adevăr, pentru funcția de forma:

$$x(t) = \mathcal{A}\sin(\omega t + \varphi) \tag{6}$$

derivata întâi în raport cu timpul, având semnificația fizică de viteză instantanee a oscilatorului, va avea expresia cunoscută:

$$v(t) = \frac{dx(t)}{dt} = \dot{x}(t) = -\mathcal{A}\omega\cos(\omega t + \varphi) \tag{7}$$

Derivata a doua a elongației, reprezentând accelerația instantanee, este de asemenea funcție sinusoidală de timp:

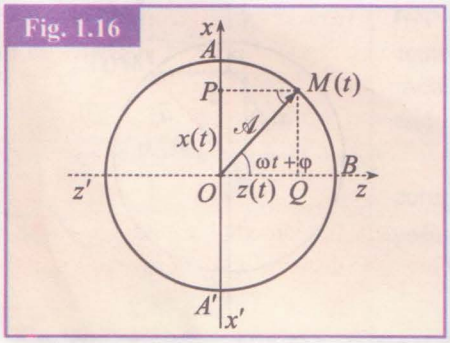
$$a(t) = \frac{dv(t)}{dt} = \dot{v}(t) = -\mathcal{A}\omega^2\sin(\omega t + \varphi) \tag{8}$$

Astfel că funcția și derivata a doua a funcției în raport cu timpul au, la orice moment de timp t, valori direct proporționale și de semne opuse:

$$a(t) = -\omega^2 x(t) \tag{9}$$

ceea ce determină armonicitatea oscilațiilor.

Fig. 1.16



2. Trebuie menționat că atât proiecția mișcării circulare uniforme pe direcția Ox a diametrului $\overline{AA'}$ al cercului, cât și proiecția pe direcția Oz a diametrului $\overline{BB'}$ perpendicular pe $\overline{AA'}$ constituie mișcări oscilatorii liniar armonice (fig. 1.16).

Într-adevăr, oscilația obținută prin proiectarea pe Oz are ecuația:

$$z(t) = \mathcal{A}\cos(\omega t + \varphi) \tag{10}$$

Pulsația ω și amplitudinea $\mathcal{A}$ sunt aceleași. Cele două oscilații perpendiculare diferă doar prin faza la originea timpului:

$$z(t) = \mathcal{A}\cos(\omega t + \varphi) = \mathcal{A}\sin(\omega t + \varphi + \frac{\pi}{2}) \tag{11}$$

Defazajul între oscilații se menține constant, egal cu $\frac{\pi}{2}$.

Putem astfel privi *mișcarea circulară uniformă ca rezultat al compunerii a două mișcări oscilatorii liniar armonice de aceeași amplitudine și frecvență, perpendiculare și defazate cu* $\frac{\pi}{2}$ *una față de cealaltă.*

Considerând planul xOz ca plan complex, vectorul de poziție $\overrightarrow{OM}$ de modul $\mathcal{A}$ este determinat prin *afixul său complex*, notat $\underline{\mathcal{A}}$:

$$\underline{\mathcal{A}} = \mathcal{A}\cos(\omega t+\varphi) + i\mathcal{A}\sin(\omega t+\varphi) = \mathcal{A}e^{i\omega t}\cdot e^{i\varphi} \tag{12}$$

Afixul $\underline{\mathcal{A}}$ reprezintă mișcarea oscilatorie liniar armonică, întrucât atât

$$\text{Re}\ \underline{\mathcal{A}} = \mathcal{A}\cos(\omega t+\varphi) = z(t) \tag{13}$$

cât și

$$\text{Im}\ \underline{\mathcal{A}} = \mathcal{A}\sin(\omega t+\varphi) = x(t) \tag{14}$$

reprezintă elongațiile a doi oscilatori liniar armonici.

Mărimea complexă $\underline{\mathcal{A}}$ se numește elongație complexă armonică. Viteza complexă și accelerația complexă vor fi reprezentate prin derivatele de ordinul întâi și respectiv doi ale elongației complexe:

$$\underline{v} = \dot{\underline{\mathcal{A}}} = i\omega\mathcal{A}e^{i\omega t}\cdot e^{i\varphi} = i\omega\underline{\mathcal{A}} \tag{15}$$

$$\underline{a} = \dot{\underline{v}} = -\omega^2\mathcal{A}e^{i\omega t}\cdot e^{i\varphi} = -\omega^2\underline{\mathcal{A}} \tag{16}$$

Reprezentarea fazorială a oscilației liniar armonice

Reprezentarea mărimilor oscilatorii prin vectori, numiți *fazori*, reduce multe probleme legate de oscilații la probleme de geometrie elementară.

Un *fazor* este un vector rotitor în planul xOz (fig. 1.17) a cărui origine este fixă și coincide cu originea axelor de coordonate; extremitatea fazorului se rotește uniform în sens pozitiv trigonometric cu o viteză unghiulară ω egală cu pulsația oscilației; la momentul inițial $t_0 = 0$, fazorul face cu axa Oz un unghi φ egal cu faza inițială a oscilației; modulul fazorului corespunde amplitudinii oscilației reprezentate. Astfel, modulul fazorului prin care se reprezintă elongația unei mișcări oscilatorii liniar armonice:

$$x(t) = \mathcal{A}\sin(\omega t+\varphi)$$

corespunde amplitudinii $\mathcal{A}$. *Proiecția fazorului, la orice moment de timp t, pe axa Ox este chiar elongația mișcării la acel moment* $x(t)$.

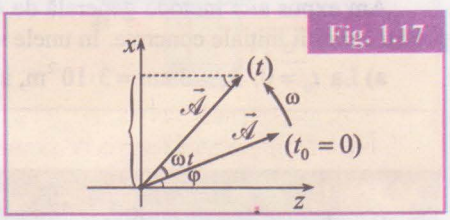


Fig. 1.17

Fazorul ce reprezintă viteza oscilatorului liniar armonic:

$$v(t) = \mathcal{A}\omega\cos(\omega t+\varphi)$$

se rotește cu aceeași viteză unghiulară ω, are modulul egal cu amplitudinea vitezei $v_{max} = \mathcal{A}\omega$ și este, la orice moment de timp, defazat cu $\pi/2$ înaintea fazorului elongației (cuadratură avans). Poziția relativă a celor doi fazori nu se modifică în timpul rotirii lor (fig. 1.18)

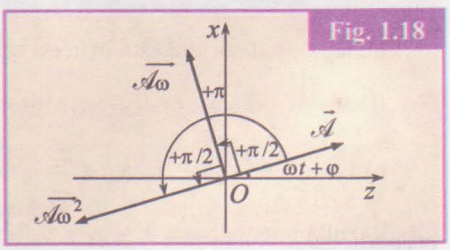


Fig. 1.18

Fazorul reprezentativ pentru accelerația oscilatorului armonic:

$$a(t) = -\mathcal{A}\omega^2\sin(\omega t+\varphi)$$

va avea modulul $\mathcal{A}\omega^2$, se va roti cu aceeași viteză unghiulară ω și va fi în permanență opus fazorului elongației, ceea ce corespunde defazajului de π radiani existent între accelerație și elongație (opoziție de fază).

În raport cu fazorul vitezei, fazorul accelerației este în cuadratură avans (fig. 1.18).

Reprezentarea oscilațiilor armonice prin fazori este foarte utilă în studiul circuitelor de curent alternativ și în optică. Metoda fazorială de tratare a oscilațiilor a fost pusă la punct de fizicianul francez Fresnel.

Exercițiu aplicativ

Enunț: Scrieți ecuația de mișcare a unui oscilator cu frecvența $\upsilon = 50$ Hz dacă la momentul inițial:

a) este lăsat să oscileze liber dintr-o poziție aflată pe direcția de oscilație Ox la distanța $x_0 = 3$ cm cm de poziția sa de echilibru O;

b) se află în poziția de echilibru $x_0 = O$ și i se comunică un impuls $p_0 = \frac{\pi}{2}$ kg·m/s pe direcția de oscilație;

c) se află în punctul de abscisă $x_0 = 4$ cm și are viteza $v_0 = 3\pi$ ms^{-1}.

Soluție: Scrierea ecuației oscilației liniar armonice:

$$x(t) = \mathcal{A}\sin(\omega t + \varphi)$$

presupune cunoașterea pulsației, ω, a amplitudinii, $\mathcal{A}$ și a fazei la originea timpului, φ.

Pulsația se determină din relația:

$$\omega = 2\pi\upsilon = 100\pi \text{ rad s}^{-1}$$

Constantele $\mathcal{A}$ și φ *sunt unic determinate de condițiile inițiale* ale problemei, adică de poziția inițială x_0 a oscilatorului și de viteza acestuia la momentul inițial, v_0.

Pentru $t_0 = 0$, din ecuația de mișcare și ecuația vitezei se obține sistemul de două ecuații cu două necunoscute:

$$\begin{cases} x(t_0 = 0) \equiv x_0 = \mathcal{A}\cdot\sin\varphi \\ v(t_0 = 0) \equiv v_0 = \mathcal{A}\omega\cos\varphi \end{cases} \quad (1)$$

Pentru aflarea lui $\mathcal{A}$ și φ, punem ecuațiile sistemului sub forma:

$$\sin\varphi = \frac{x_0}{\mathcal{A}};\ \cos\varphi = \frac{v_0}{\mathcal{A}\omega} \quad (2)$$

Prin ridicarea la pătrat și adunarea membru cu membru a ecuațiilor, obținem pentru amplitudine:

$$\mathcal{A} = \frac{1}{\omega}\sqrt{v_0^2 + x_0^2\omega^2} \quad (3)$$

Împărțind ecuațiile (2) membru cu membru, găsim:

$$\text{tg}\varphi = \frac{x_0\omega}{v_0} \quad (4)$$

Am expus aici metoda generală de calcul pentru aflarea amplitudinii și fazei inițiale. Ea poate fi particularizată pentru condiții inițiale concrete. În unele situații, rezolvarea sistemului (1) devine mult mai ușoară:

a) La $t_0 = 0$, $x_0 = 3$ cm $= 3\cdot10^{-2}$m, iar $v_0 = 0$. Sistemul de ecuații (1) este:

$$\begin{cases} 3\cdot10^{-2} = \mathcal{A}\cdot\sin\varphi \\ 0 = \mathcal{A}\omega\cos\varphi \end{cases} \quad (5)$$

Rezultă direct $\cos\varphi = 0$, $\varphi = \frac{\pi}{2}$, iar $\mathcal{A} = 3\cdot10^{-2}$ m.

Ecuația oscilatorului este în acest caz: $x(t) = 0{,}03\cdot\sin\left(100\pi t + \frac{\pi}{2}\right)$ (m) adică:

$$x(t) = 0{,}03\cdot\cos 100\pi t \text{ (m)} \quad (6)$$

b) La $t_0 = 0$, $x_0 = 0$, iar $v_0 = \frac{p_0}{m} = \pi$ ms^{-1}. Înlocuind în (1): $\begin{cases} 0 = \mathcal{A}\cdot\sin\varphi \\ \pi = 100\pi\mathcal{A}\omega\cos\varphi \end{cases}$.

Rezultă imediat: $\varphi = 0$, și $\mathcal{A} = 0{,}01$ m. Ecuația mișcării se va scrie:

$x(t) = 0{,}01\cdot\sin 100\pi t$ (m) (7)

c) În această situație este indicată aplicarea rezultatelor metodei generale.

Înlocuind valorile lui x_0 și v_0 în ecuația (3) obținem valoarea amplitudinii:

$$\mathcal{A} = \frac{1}{100\pi}\sqrt{(3\pi)^2 + (4\cdot10^{-2}\cdot10^2\pi)^2} \text{ m} = 0{,}05 \text{ m}$$

Din relația (4) găsim pentru faza inițială:

$$\varphi = \text{arctg}\frac{4\cdot10^{-2}\cdot10^2\pi}{3\pi} = \text{arctg}\frac{4}{3}$$

Ecuația oscilatorului devine:

$$x(t) = 0{,}05\cdot\sin\left(100\pi t + \text{arctg}\frac{4}{3}\right) \text{ (m)} \quad (8)$$

1.1.2.2 Studiul experimental al unor procese oscilatorii libere simple

Cele mai simple sisteme oscilante libere sunt pendulul elastic şi pendulul matematic (simplu).

În cele ce urmează vom analiza rolul forţei de revenire şi al inerţiei sistemului în determinarea mişcărilor oscilatorii ale celor două sisteme, demonstrând că, în absenţa frecărilor, oscilaţiile acestora pot fi considerate liniar armonice.

A. Studiul pendulului elastic

Pendulul elastic este constituit dintr-un corp de mici dimensiuni (punct material) de masă m, legat de un resort presupus perfect elastic şi fără masă, având constanta de elasticitate k.

Îndepărtând masa m din poziţia de echilibru pe direcţia resortului şi eliberând-o apoi, observăm oscilaţiile libere ale acesteia în jurul poziţiei de echilibru (fig. 1.19).

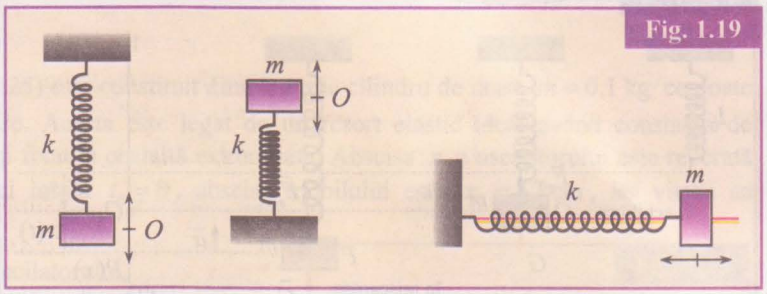


Fig. 1.19

EXPERIMENT

Pentru înregistrarea mişcării oscilatorii a masei m suspendate de resortul având constanta de elasticitate k, se poate folosi osciloscopul catodic sau calculatorul, prin convertirea variaţiilor poziţiei corpului în tensiune electrică variabilă.

Pentru aceasta, se fixează de corpul m o tijă metalică uşoară a cărei extremitate se scufundă mai mult sau mai puţin într-o cuvă cu o soluţie conductoare. La suprafaţa lichidului şi pe fundul acestuia se găsesc două plăci conductoare plane legate la o baterie (fig. 1.20). Între tija metalică şi una dintre plăcile cuvei se conectează un osciloscop catodic. El măsoară diferenţa de potenţial între una dintre plăci (C) şi extremitatea tijei. Această tensiune, U, este proporţională cu distanţa d dintre extremitatea tijei şi placa conductoare C. În timpul oscilaţiilor, această distanţă variază, aşa încât tensiunea înregistrată va fi de asemenea variabilă. Potrivind baza de timp în mod convenabil, pe ecranul osciloscopului vom vizualiza mişcarea extremităţii tijei, deci a masei m (fig. 1.21). Mişcarea este periodică, sinusoidală (uşor amortizată din cauza frecărilor slabe ale tijei cu lichidul şi ale întregului sistem oscilant cu aerul). Putem determina perioada T prin citiri pe ecranul osciloscopului, folosindu-ne de indicaţia bazei de timp.

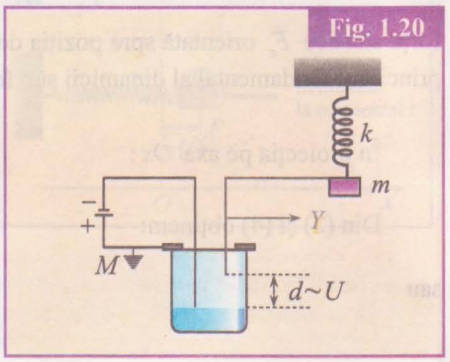


Fig. 1.20

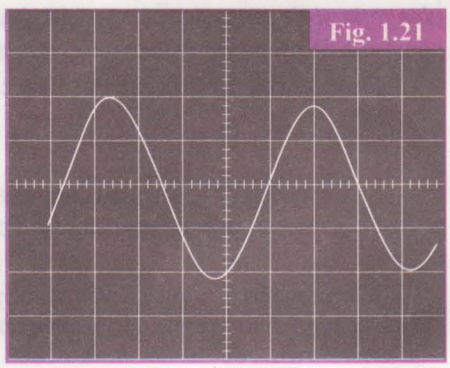


Fig. 1.21

Reluăm experimentul, modificând amplitudinea mişcării. Constatăm că perioada nu se modifică (fig. 1.22). Dacă însă înlocuim corpul cu un altul de masă diferită, perioada se modifică.

În fig. 1.23 sunt redate înregistrările suprapuse ale unui oscilator constituit din acelaşi resort, dar cu două mase diferite, $m_2 > m_1$. Puteţi observa că $T_2 > T_1$.

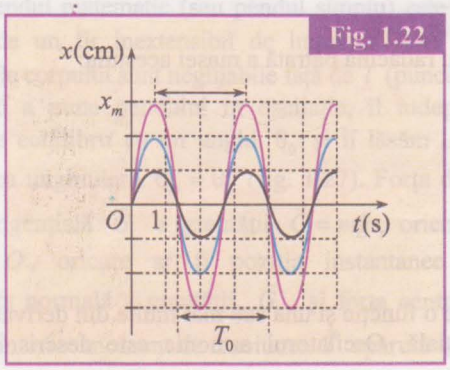


Fig. 1.22

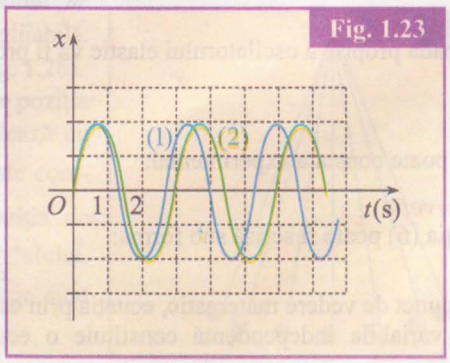
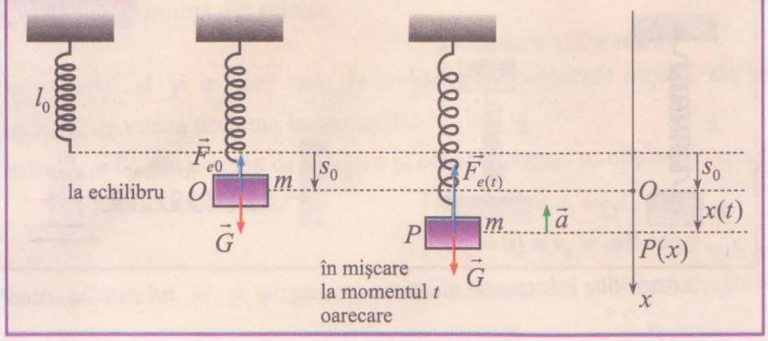


Fig. 1.23

Studiul dinamic

Sistemul studiat este punctul material de masă m supus greutății proprii și forței elastice cu care acționează asupra sa resortul ideal având constanta de elasticitate k (fig. 1.24). La echilibru, punctul material m ocupă poziția O, iar resortul este alungit cu s_0. Forțele ce acționează asupra lui m sunt greutatea $\vec{G}$ și forța elastică $\vec{F}_{e_0}$, corespunzătoare alungirii s_0. După cum știți, intensitatea forței elastice este proporțională cu deformarea resortului.

Fig. 1.24



Conform principiului I al dinamicii, vom scrie:

$$\vec{G}+\vec{F}_{e_0}=\vec{0} \tag{1}$$

În proiecția pe axa Ox, orientată vertical în jos:

$$mg-ks_0=0 \tag{2}$$

Resortul este deformat (alungit sau comprimat) și eliberat fără viteză inițială (momentul $t_0=0$). Punctul material m oscilează liniar. La un moment oarecare de timp t, fie $x(t)$ elongația punctului față de poziția de echilibru. Alungirea totală a resortului, s_0+x, determină apariția unei forțe elastice $\vec{F}_e$ orientată spre poziția de echilibru. Fie $\vec{a}$ accelerația oscilatorului la momentul considerat. Se aplică principiul fundamental al dinamicii sub formă vectorială:

$$\vec{G}+\vec{F}_e=m\vec{a} \tag{3}$$

În proiecția pe axa Ox:

$$mg-k(s_0+x)=ma \tag{4}$$

Din (2) și (4) obținem:

$$ma=-kx \tag{5}$$

sau

$$a=-\frac{k}{m}x \tag{6}$$

Cum momentul de timp este oarecare, tragem concluzia că în timpul oscilației *accelerația este proporțională cu elongația și de sens contrar* acesteia, deci că oscilatorul considerat este *armonic*. Conform condiției de armonicitate, constanta de proporționalitate între $a(t)$ și $x(t)$ este pătratul pulsației proprii de oscilație.

Deducem că pentru pendulul elastic, pulsația proprie este:

$$\omega=\sqrt{\frac{k}{m}} \tag{7}$$

Să observăm că aceasta nu depinde decât de elasticitatea resortului și de masa oscilatorului. Într-adevăr, forța de revenire, orientată în orice moment spre poziția de echilibru, este forța elastică:

$$F_r=F_e=-kx \tag{8}$$

Interpretarea dinamică a pătratului pulsației proprii ca raport al forței de revenire pe unitatea de deformare și al masei sistemului ne conduce la același rezultat:

$$\omega^2=\frac{\frac{F_r}{x}}{m}=\frac{\frac{F_e}{x}}{m}=\frac{k}{m} \tag{9}$$

Perioada proprie a oscilatorului elastic va fi proporțională cu rădăcina pătrată a masei acestuia:

$$T=2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} \tag{10}$$

ceea ce se poate constata experimental.

Observație

Relația (6) poate fi scrisă sub forma:

$$\ddot{x}+\omega^2x=0 \tag{11}$$

Din punct de vedere matematic, ecuația prin care sunt legate o funcție și una sau mai multe din derivatele sale în raport cu variabila independentă constituie o ecuație diferențială. Oscilatorul armonic este descris de ecuația

diferențială de ordinul doi (apare derivata de ordinul doi $\ddot{x}(t)$ a funcției $x(t)$) omogenă (11), care admite drept soluție funcția sinusoidală:

$$x(t) = \mathcal{A}\sin(\omega t + \varphi) \qquad (12)$$

Constantele $\mathcal{A}$ (amplitudinea oscilației) și φ (faza inițială) sunt unic determinate de condițiile inițiale ($t_0 = 0, x(0) = x_0, v(0) = v_0$).

Exercițiu aplicativ

Enunț: Un pendul elastic orizontal (fig. 1.25) este constituit dintr-un mic cilindru de masă $m = 0{,}1$ kg ce poate culisa fără frecări în lungul unei tije orizontale. Acesta este legat de un resort elastic ideal având constanta de elasticitate $k = 10$ N/m, înfășurat în jurul tijei și fixat la cealaltă extremitate. Abscisa x a oscilatorului este reperată față de poziția de echilibru O. La momentul inițial $t_0 = 0$, abscisa mobilului este $x_0 = +2$ cm, iar viteza sa $v_0 = -0{,}20$ ms^{-1}. Calculați:

a) Pulsația proprie, perioada și frecvența oscilatorului.
b) Scrieți ecuația de mișcare și ecuația vitezei oscilatorului.
c) Calculați poziția și viteza acestuia la momentul $t = 6$ s.

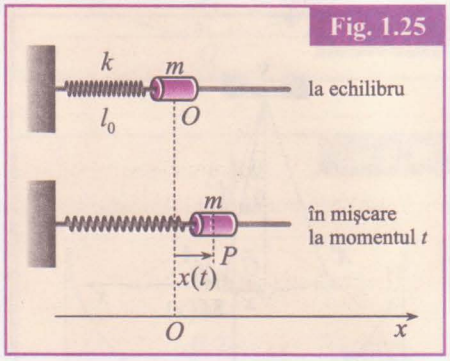


Fig. 1.25

Soluție: a) Utilizăm pentru calcul relația (7). Găsim succesiv:

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = 10 \text{ rad s}^{-1},\ T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{\pi}{4} \text{ rad s}^{-1} = 0{,}628 \text{ s},\ \upsilon = \frac{1}{T} = 1{,}59 \text{ Hz}.$$

b) Ecuația de mișcare și ecuația vitezei se scriu sub forma generală:

$$x(t) = \mathcal{A}\sin(\omega t + \varphi),\ v(t) = \mathcal{A}\omega\cos(\omega t + \varphi)$$

Punând condițiile inițiale, obținem sistemul:

$$\begin{cases} \mathcal{A}\sin\varphi = 0{,}02 \text{ (m)} \\ 10\mathcal{A}\cos\varphi = -0{,}20 \text{ (ms}^{-1}\text{)} \end{cases}$$

Prin împărțirea ecuațiilor obținem: $\text{tg}\,\varphi = -1$, deci $\varphi = \frac{3\pi}{4}$

apoi din prima ecuație, $\mathcal{A} = \sqrt{2}\cdot 0{,}02 \text{ m} = 0{,}028 \text{ m}$.

Ecuația de mișcare devine $x(t) = 0{,}028\cdot\sin(10t + \frac{3\pi}{4})$ (m) sau $x(t) = 0{,}028\cdot\cos(10t + \frac{\pi}{4})$ (m)

iar ecuația vitezei:

$$v(t) = -0{,}28\cdot\sin(10t + \frac{\pi}{4}) \text{ (ms}^{-1}\text{)}$$

c) La momentul $t = 6$ s obținem: $x(t) = 0{,}028\cdot\cos(60_{(\text{rad})} + \frac{\pi}{4}) = -0{,}013$ m

$$v(t) = -0{,}28\cdot\sin(60_{(\text{rad})} + \frac{\pi}{4}) = 0{,}25 \text{ ms}^{-1}$$

B. Studiul cu pendulul matematic fără frecări

Un pendul matematic (sau pendul simplu) este un corp de masă m suspendat de un fir inextensibil de lungime l și de masă neglijabilă. Dimensiunile corpului sunt neglijabile față de l (punct material – fig. 1.26).

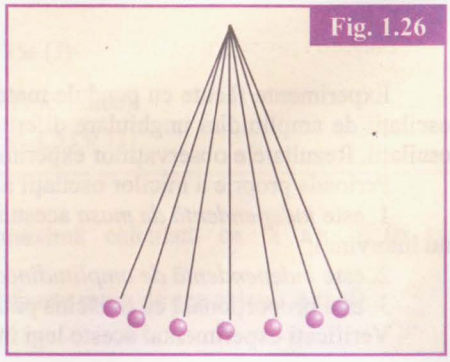
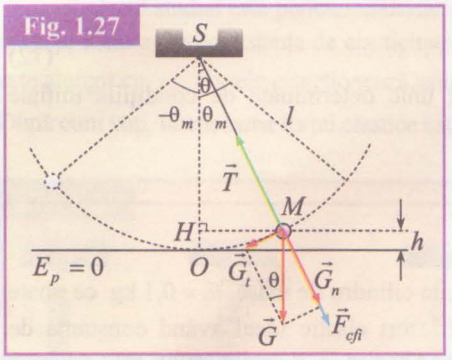


Fig. 1.26

Pentru a pune pendulul în oscilație, îl îndepărtăm de la poziția verticală de echilibru cu un unghi θ_0 și îl lăsăm liber. El oscilează cu amplitudinea unghiulară $\theta_m = \theta_0$ (fig. 1.27). Forța de revenire este componenta tangențială $\vec{G}_t$ a greutății $\vec{G} = m\vec{g}$, orientată spre poziția de echilibru, O, oricare ar fi poziția instantanee M a pendulului. Componenta normală a greutății, $\vec{G}_n$, și forța centrifugă de inerție sunt echilibrate în orice moment de tensiunea $\vec{T}$ apărută în fir.

Fig. 1.27



Pentru poziția instantanee M, caracterizată de elongația unghiulară θ, putem scrie:

$$-G_t = ma_t \qquad (1)$$

unde a_t reprezintă accelerația tangențială a masei m a pendulului, iar

$$G_t = mg \cdot \sin\theta \qquad (2)$$

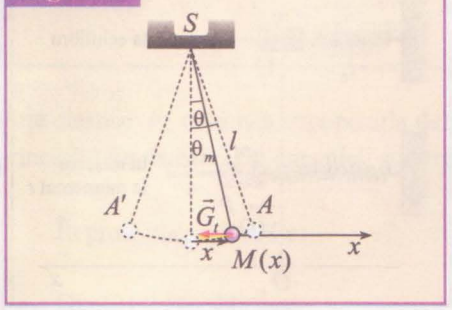
Ecuația (1) devine:

$$a_t = -g \cdot \sin\theta \qquad (3)$$

În general, forma oscilațiilor $\theta(t)$, soluții ale ecuației (3), nu este armonică, deși mișcarea curbilinie descrisă este periodică. Se demonstrează că perioada oscilațiilor pendulului matematic depinde de amplitudinea unghiulară θ_m, dacă aceasta nu este mult mai mică decât 1 radian.

Aproximația micilor oscilații

Fig. 1.28



Dacă amplitudinea pendulului matematic nu depășește 20°, se constată experimental că perioada proprie a oscilațiilor pendulului matematic nu mai depinde practic de amplitudine.

În acest caz vorbim despre *micile oscilații* ale pendulului. Deoarece arcul $\overset{\frown}{OA}$ corespunzător unei amplitudini unghiulare θ_m mici diferă foarte puțin de coarda $\overline{OA}$, putem considera *mișcarea* masei m *aproximativ liniară*. Fie Ox axa de coordonate atașată direcției de oscilație și x abscisa poziției M a mobilului la un moment dat (fig. 1.28). Fie θ unghiul corespunzător de înclinare a firului față de verticală.

Pentru θ exprimat în radiani și mai mic de 5° utilizăm aproximația:

$$\sin\theta \approx \theta \qquad (4)$$

Putem scrie: $OM \approx \overline{OM} = x$, unde $OM = l \cdot \sin\theta \approx l \cdot \theta$.

Deci elongația liniară x este proporțională cu deviația unghiulară θ exprimată în radiani:

$$x \approx l \cdot \theta \qquad (5)$$

Putem aplica și în acest caz ecuația de mișcare (3), unde a_t va reprezenta aici accelerația oscilatorului liniar și va avea direcția axei de mișcare, Ox.

Ecuația (3) aplicată micilor oscilații ($\theta < 20^\circ$, caz în care se aproximează $\sin\theta = \theta$) devine:

$$a \approx -g \cdot \theta \qquad (6)$$

sau, conform cu (5):

$$a \approx -\frac{g}{l} \cdot x \qquad (7)$$

Rezultă că *micile oscilații ale unui pendul matematic sunt aproximativ liniar armonice,* accelerația fiind proporțională cu elongația liniară și de sens opus acesteia.

Pulsația proprie a micilor oscilații este deci:

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{l}} \qquad (8)$$

iar perioada lor proprie:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}} \qquad (9)$$

Experimente făcute cu pendule matematice de mase diferite, de lungimi diferite și cărora li s-au imprimat mici oscilații de amplitudini unghiulare diferite, au verificat valabilitatea expresiei (9) pentru perioada proprie a micilor oscilații. Rezultatele observațiilor experimentale au stat la baza formulării *legilor* pendulului matematic.

Perioada proprie a micilor oscilații ale unui pendul matematic:

1. este *independentă de masa* acestuia (ca de altfel pentru toate mișcările ce au loc în câmpul gravitațional, masa nu intervine);
2. este *independentă de amplitudinea* oscilațiilor (proprietate numită *izocronismul* micilor oscilații);
3. este proporțională cu rădăcina pătrată a lungimii l a firului de suspensie.

Verificați experimental aceste legi în laboratorul de fizică.

Exercițiu aplicativ

Enunț: Un pendul simplu este îndepărtat de la poziția sa de echilibru cu un unghi $\alpha_0 = 45^\circ$. Corpul suspendat de fir este asimilabil unui punct material cu masa $m = 200$ g. Lungimea firului este $l = 0{,}8$ m.

a) Considerând planul orizontal ce conține poziția de echilibru ca nivel de referință, exprimați energia potențială a sistemului Pământ-pendul în funcție de elongația unghiulară instantanee α; reprezentare grafică.

b) Exprimați energia cinetică a pendulului în funcție de unghiul α; reprezentare grafică.

c) Calculați perioada oscilațiilor acestui pendul pentru o amplitudine unghiulară $\alpha_0 = 10^\circ$.

d) Exprimați energia cinetică și energia potențială ca funcții de timp, știind că la momentul inițial ($t_0 = 0$), $\alpha_0 = 10^\circ$ și $v_0 = 0$.

Se consideră $g = 10\ \text{ms}^{-2}$.

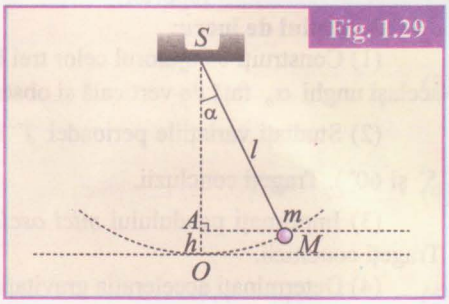


Fig. 1.29

Soluție: a) Conform fig. 1.29, înălțimea la care se află pendulul față de nivelul de referință, corespunzătoare unghiului α, este:

$$h = \overline{OA} = l(1 - \cos\alpha)$$

Energia potențială gravitațională în funcție de α are expresia:

$$E_p(\alpha) = mgl(1 - \cos\alpha)$$

Numeric: $E_p(\alpha) = 1{,}6(1 - \cos\alpha)$

Valoarea maximă a energiei potențiale este atinsă pentru $\alpha = \pm\alpha_m = \pm\dfrac{\pi}{4}$ și are valoarea: $E_{p\max} = 0{,}47$ J.

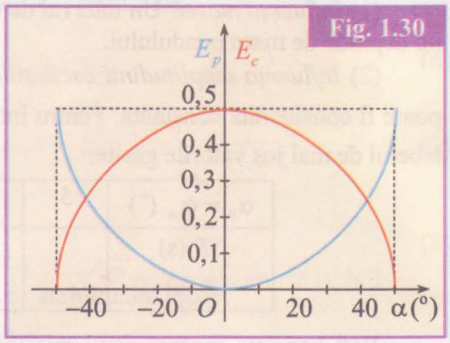


Fig. 1.30

Reprezentarea grafică este redată în fig. 1.30 (curba de culoare albastră).

b) Conservarea energiei mecanice permite exprimarea energiei cinetice în funcție de amplitudinea unghiulară:

$$E_c(\alpha) = E_m - E_p(\alpha) = E_{p\max} - E_p(\alpha)$$

$$E_c(\alpha) = 1{,}60\cos\alpha - 1{,}13\ \text{(J)}$$

Graficul $E_c(\alpha)$ este redat în fig. 1.30 (curba de culoare roșie).

c) La amplitudinea $\alpha_m = \alpha_0 = 10^\circ$ putem vorbi de mici oscilații liniar armonice, a căror perioadă este:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}} = 6{,}28\sqrt{\frac{0{,}8}{10}}\ \text{s} = 1{,}776\ \text{s}$$

d) Ecuația oscilatorului liniar-armonic și ecuația vitezei:

$$\begin{cases} x(t) = l\cdot\alpha_0\sin(\omega t + \varphi) \\ v(t) = l\cdot\alpha_0\cdot\omega\cos(\omega t + \varphi) \end{cases}$$

În condițiile inițiale date, rezultă $\cos\varphi = 0$, $\varphi = \dfrac{\pi}{2}$, deci:

$$x(t) = 0{,}8\frac{\pi}{18}\cos 3{,}535t \cong 0{,}14\cos 5{,}535t\ \text{(m)}$$

iar $v(t) = 0{,}493\cdot\sin 3{,}535t\ (\text{ms}^{-1})$.

Dependența de timp a energiei cinetice este:

$$E_c(t) = \frac{mv^2(t)}{2};\quad E_c(t) = 0{,}0243\sin^2 3{,}535t\ \text{(J)}$$

iar dependența de timp a energiei potențiale (dedusă din conservarea energiei mecanice):

$$E_p(t) = E_m - E_c(t) = E_{c\max} - E_c(t) = 0{,}0243\cos^2 3{,}535t\ \text{(J)}$$

Observație

Energia potențială este de natură gravitațională. Valoarea sa maximă calculată ca la **a)**: $E_p(\alpha_0) = mgl\left(1 - \cos\dfrac{\pi}{18}\right) = 2mgl\sin^2\dfrac{\pi}{36} \approx 2mgl\cdot\dfrac{\pi^2}{36^2} \approx 0{,}0246$ (J) nu diferă decât foarte puțin de cea calculată la **d)**.

LUCRARE DE LABORATOR – *Studiul pendulului matematic*

1. Obiective: • Să observăm că perioada pendulului simplu nu depinde de masă.
• Să studiem influența amplitudinii asupra perioadei.
• Să studiem influența lungimii asupra perioadei în cazul micilor oscilații.

2. Materiale: – bile de același diametru din lemn, aluminiu și fier;
– fire inextensibile (circa 1,30 – 1,50 m fiecare);
– suport vertical;
– raportor.

3. Modul de lucru:

(1) Construiți cu ajutorul celor trei bile trei pendule de aceeași lungime. Puneți-le în oscilație îndepărtându-le cu același unghi α_0 față de verticală și observați mișcările lor.

(2) Studiați variațiile perioadei T în funcție de amplitudinea unghiulară $\alpha_m = \alpha_0$ (pentru valori cuprinse între 5° și 60°). Trageți concluzii.

(3) Imprimați pendulului *mici oscilații* și modificați lungimea l a firului, măsurând de fiecare dată perioada. Trageți concluzii.

(4) Determinați accelerația gravitațională, g.

4. Măsurători. Valorificarea rezultatelor

(1) *Influența masei:* Un interval de timp destul de lung, cele trei pendule oscilează cu aceeași perioadă. Perioada nu depinde de masa pendulului.

(2) *Influența amplitudinii oscilațiilor:* Se măsoară durata a doar 5 perioade, interval în care amplitudinea α_m poate fi considerată constantă. Pentru intervale mai mari, amortizarea devine perceptibilă (α_m descrește). Inserați în tabelul de mai jos valorile găsite:

$\alpha_0 = \alpha_m$ (°)	5	10	15	20	25	30	40	50	60
$5T$ (s)									
T (s)									

Veți constata izocronismul micilor oscilații pentru amplitudini unghiulare sub 20°. Perioada crește ușor cu amplitudinea oscilațiilor pentru $\alpha > 20^\circ$ și oscilațiile nu mai pot fi considerate izocrone.

(3) *Influența lungimii pendulului asupra perioadei micilor oscilații:* Pentru diferite lungimi ale pendulului, măsurați durata a 10 oscilații complete de mică amplitudine și determinați de fiecare dată perioada.

Atenție! Lungimea pendulului este egală cu lungimea firului, la care se adaugă raza bilei.

Treceți datele în tabelul:

l (m)	1,20	1,00	0,80	0,60	0,40	0,20
$10T$ (s)						
T (s)						

Construiți graficul $T^2 = f(l)$.

Justificați matematic liniaritatea sa.

(4) Calculați din panta graficului valoarea medie a accelerației gravitaționale. Comparați-o cu valoarea cunoscută pentru latitudinea noastră, $g = 9{,}8\ \text{ms}^{-2}$.

(5) Specificați sursele de erori.

1.1.3 Descrierea cantitativă din punct de vedere energetic a oscilatorului armonic

Pentru simplitate, vom considera cazul unui oscilator elastic orizontal (fig. 1.25) format dintr-un mic corp de masă m, legat de un resort având constanta de elasticitate k; corpul poate culisa fără frecări pe o tijă orizontală. Oscilațiile libere sunt considerate liniar armonice, în ipoteza neglijării oricăror forțe de frecare. Energia mecanică E_m

a sistemului masă-resort este suma dintre energia cinetică E_c şi energia potenţială elastică E_p a oscilatorului. Alegem drept stare de referinţă poziţia de echilibru, când resortul nu este deformat $(x = 0)$.

Energia cinetică a oscilatorului este la un moment dat:

$$E_c = \frac{1}{2}mv^2 \tag{1}$$

unde v reprezintă viteza oscilatorului liniar armonic, la momentul t:

$$v(t) = \mathcal{A}\omega\cos(\omega t + \varphi) \tag{2}$$

Pulsaţia oscilatorului elastic:

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} \tag{3}$$

Înlocuind (2) în (1), exprimăm energia cinetică în funcţie de timp:

$$E_c(t) = \frac{1}{2}m\mathcal{A}^2\omega^2\cos^2(\omega t + \varphi) \tag{4}$$

sau ţinând cont de (3):

$$E_c(t) = \frac{k}{2}\mathcal{A}^2\cos^2(\omega t + \varphi) \tag{5}$$

Energia potenţială elastică ce corespunde stării de deformare (elongaţie) x a resortului:

$$E_p = k\frac{x^2}{2} \tag{6}$$

depinde de timp prin intermediul elongaţiei:

$$x(t) = \mathcal{A}\sin(\omega t + \varphi) \tag{7}$$

Deci:

$$E_p(t) = k\frac{\mathcal{A}^2}{2}\sin^2(\omega t + \varphi) \tag{8}$$

Să observăm că atât $E_c(t)$ cât şi $E_p(t)$ sunt funcţii periodice de timp, de amplitudini egale:

$$E_{p_{max}} = E_{c_{max}} = \frac{k\mathcal{A}^2}{2} = \frac{mv_{max}^2}{2} = \frac{m\omega^2\mathcal{A}^2}{2} \tag{9}$$

Reprezentarea lor grafică este redată în fig. 1.31, pentru $\varphi = 0$. Am notat prin T perioada oscilaţiei armonice.

Perioada de variaţie a energiei cinetice şi a celei potenţiale este jumătate din perioada oscilaţiei. Când energia potenţială este maximă ($x = \pm\mathcal{A}$) energia cinetică este minimă ($v = 0$) şi invers (fig. 1.32). Când energia cinetică creşte, energia potenţială scade şi invers. Suma lor, reprezentând energia mecanică a sistemului, rămâne însă constantă în timp:

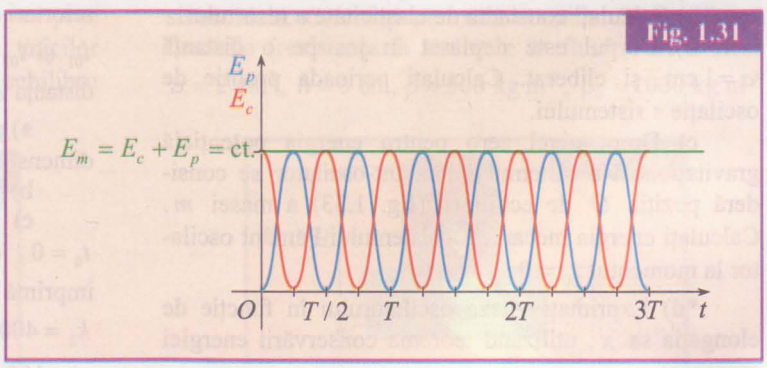


Fig. 1.31

$$E_m = E_p(t) + E_c(t) =$$
$$= \frac{k\mathcal{A}^2}{2}\left[\sin^2(\omega t + \varphi) + \cos^2(\omega t + \varphi)\right] = \tag{10}$$
$$= \frac{k\mathcal{A}^2}{2} = \text{ct.}$$

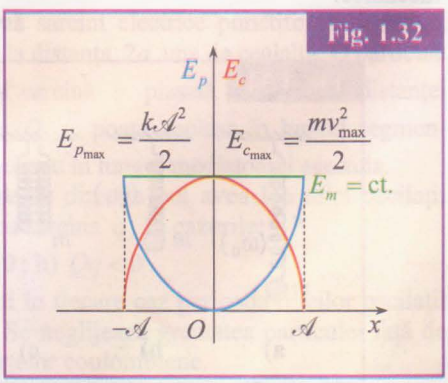


Fig. 1.32

Spunem că pentru sistemul oscilator elastic izolat *energia mecanică se conservă*.

Valoarea energiei mecanice depinde de pătratul amplitudinii:

$$E_m = \frac{k\mathcal{A}^2}{2} = \frac{m\omega^2\mathcal{A}^2}{2} \tag{11}$$

Exerciții și probleme propuse

1. Un oscilator elastic orizontal fără frecări este constituit dintr-un resort de constantă $k = 20\ \text{Nm}^{-1}$ și un mic corp de masă $m = 0{,}2\ \text{kg}$. Corpul este îndepărtat cu 3 cm față de poziția sa de echilibru și lăsat apoi liber să oscileze. Calculați:

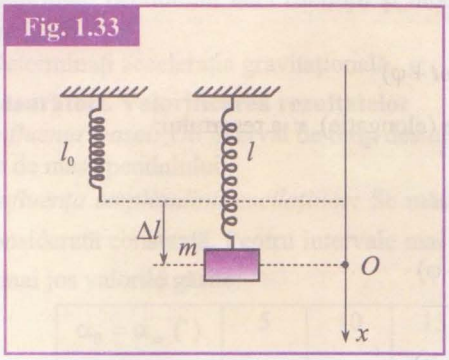
a) perioada de oscilație;

b) valoarea energiei potențiale elastice a oscilatorului în momentul eliberării sale;

c) energia cinetică la trecerea oscilatorului prin poziția de echilibru; deduceți de aici amplitudinea vitezei;

d) momentele de timp și pozițiile oscilatorului pentru care energia cinetică este egală cu energia potențială.

Fig. 1.33



2. De un resort ideal de lungime nedeformată $l_0 = 0{,}10\ \text{m}$ suspendat vertical se atașează o masă $m = 50\ \text{g}$. Lungimea resortului devine $l = 0{,}12\ \text{m}$ la echilibru ($g = 9{,}8\ \text{ms}^{-2}$).

a) Calculați constanta de elasticitate a resortului.

b) Corpul este deplasat în jos pe o distanță $a = 1\ \text{cm}$ și eliberat. Calculați perioada proprie de oscilație a sistemului.

c) Drept nivel zero pentru energia potențială gravitațională a sistemului Pământ-oscilator se consideră poziția O de echilibru (fig. 1.33) a masei m. Calculați energia mecanică a sistemului Pământ oscilator la momentul $t_0 = 0$.

***d)** Exprimați viteza oscilatorului în funcție de elongația sa x, utilizând teorema conservării energiei mecanice.

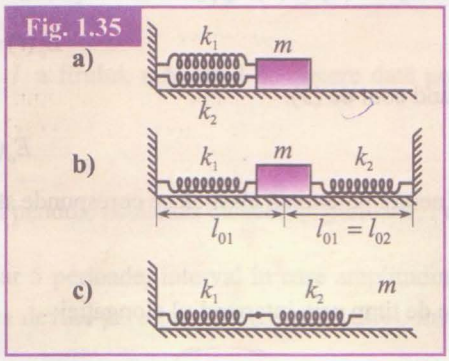
3. Un corp de masă m suspendat de un resort având constanta de elasticitate k oscilează cu pulsația ω_0.

Dacă tăiem resortul în două părți egale și suspendăm același corp de una dintre ele, pulsația devine ω_1 (fig. 1.34).

a) Evaluați raportul ω_1 / ω_0.

b) Suspendăm acum corpul de cele două jumătăți dispuse ca în fig. 1.34.c. Exprimați pulsația ω_2 a oscilatorului obținut.

Fig. 1.35



4. Două resorturi cu aceeași lungime în stare nedeformată, dar având constante elastice diferite, k_1 și respectiv k_2, sunt legate de un mic corp ce poate aluneca fără frecări pe o suprafață orizontală. Calculați perioada proprie de oscilație în fiecare dintre cazurile prezentate în fig. 1.35.

5. Un corp de masă m este suspendat prin două resorturi de constante k_1 și k_2 și de lungimi nedeformate l_{01} și l_{02} între două puncte situate pe aceeași verticală, la distanța a ($a > l_{01} + l_{02}$), ca în fig. 1.36. Determinați:

a) poziția de echilibru a corpului m considerat de dimensiuni neglijabile;

b) pulsația și perioada proprie de oscilație a corpului;

c) scrieți ecuația de mișcare dacă la momentul $t_0 = 0$, corpului, aflat în poziția de echilibru, i se imprimă viteza v_0. Se cunosc $k_1 = 6000\ \text{N/m}$, $k_2 = 4000\ \text{N/m}$, $l_{01} = 40\ \text{cm}$, $l_{02} = 30\ \text{cm}$, $a = 1\ \text{m}$, $m = 100\ \text{kg}$, $v_0 = 0{,}9\ \text{ms}^{-1}$.

Fig. 1.34

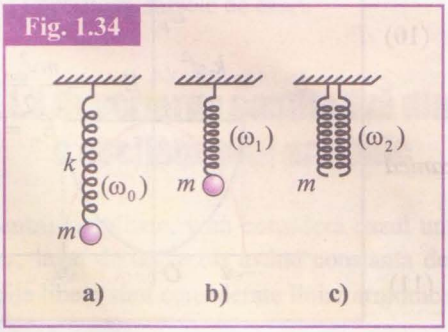
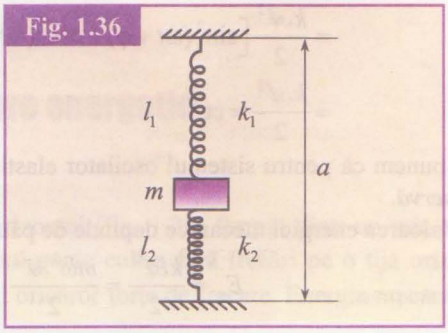


Fig. 1.36



*6. Un corp de masă m este lăsat să cadă liber de la înălțimea h pe platanul de masă M susținut de resortul vertical de constantă k (fig. 1.37). Considerând ciocnirea perfect plastică, scrieți legea de mișcare a sistemului după impactul lui m cu platanul.

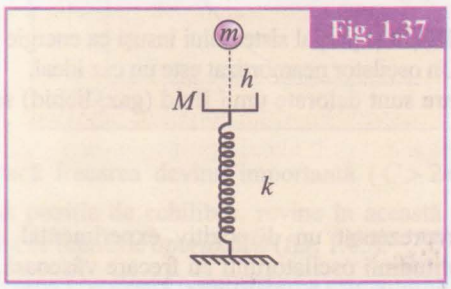


Fig. 1.37

7. Un oscilator mecanic este constituit dintr-o biluță de masă m ce poate aluneca fără frecări într-un jgheab circular, plasat în planul vertical și având raza R (fig. 1.38). Arătați că dacă bila este deplasată față de poziția sa de echilibru cu un unghi la centru mic și eliberată fără viteză inițială, ea oscilează armonic. Calculați perioada micilor oscilații ale biluței.

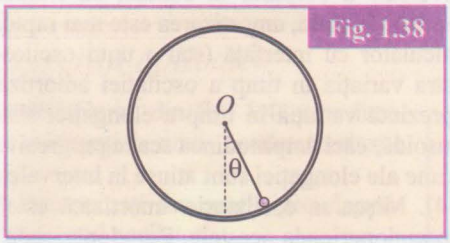


Fig. 1.38

*8. Suportul unui pendul gravitațional de lungime l este fixat pe un cărucior care coboară pe un plan înclinat de unghi α. Exprimați perioada micilor oscilații ale pendulului în jurul poziției sale de echilibru (fig. 1.39).

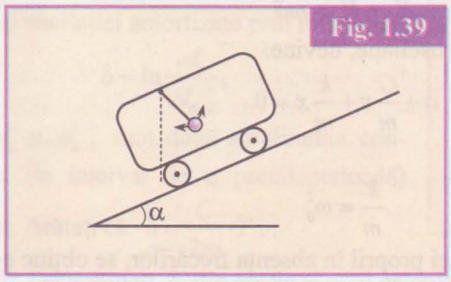


Fig. 1.39

*9. O cutie are o mișcare de translație verticală sinusoidală descrisă de ecuația $x = x_m \sin \omega t$ (fig. 1.40). Pentru a obține această mișcare, cutia se sprijină pe un resort elastic de constantă k. De capacul cutiei este atârnat un pendul de lungime l și de masă m. Masa cutiei este M.

a) Scrieți condiția de echilibru a corpului m suspendat în cutie; deduceți de aici expresia tensiunii în firul de suspensie.

b) Pentru ce valoare minimă a amplitudinii x_m a oscilațiilor cutiei firul nu mai rămâne întins?

Aplicație numerică: $k = 10\ \text{Nm}^{-1}$, $M = m = 100$ g, $x_m = 20$ cm.

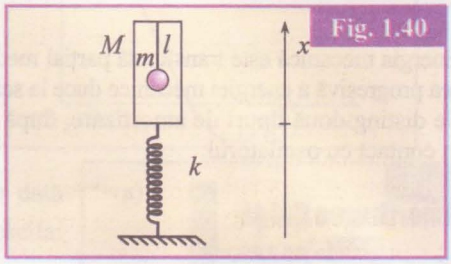


Fig. 1.40

*10. Corpul de masă m, electrizat cu sarcina $q > 0$ este suspendat de un fir de lungime l, inextensibil, izolator și plasat într-un câmp electric uniform de intensitate $\vec{E}$.

Exprimați perioada micilor oscilații ale pendulului în jurul poziției de echilibru în următoarele cazuri:

a) $\vec{E}$ paralel și de același sens cu $\vec{g}$;

b) $\vec{E}$ paralel, dar de sens opus lui $\vec{g}$;

c) $\vec{E}$ perpendicular pe $\vec{g}$.

*11. Un dop de plastic de secțiune S, înălțime H și densitate ρ plutește la suprafața unui lichid de densitate ρ_0 ($\rho_0 > \rho$) (fig. 1.41).

a) Calculați adâncimea h_0 cu care se scufundă dopul la echilibru.

b) Dopul este împins puțin în lichid, apoi este eliberat. Arătați că dopul va efectua o mișcare rectilinie sinusoidală. Calculați perioada acesteia. Se neglijează frecările (rezistența la înaintare în fluide). Se cunosc $S = 2\ \text{cm}^2$, $h = 5$ cm, $\rho = 500\ \text{kg m}^{-3}$, $\rho_0 = 1000\ \text{kg m}^{-3}$

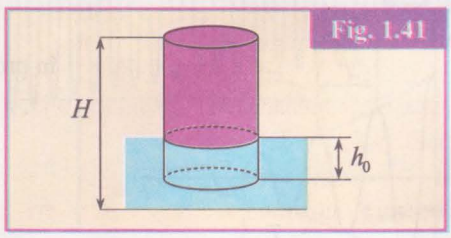


Fig. 1.41

*12. Două sarcini electrice punctiforme identice, Q, sunt fixate la distanța $2a$ una de cealaltă. O particulă de masă m și sarcină q plasată la mijlocul distanței dintre sarcinile Q se poate deplasa în lungul segmentului ce le unește sau în lungul mediatoarei acestuia.

Arătați pe ce direcție pot avea loc mici oscilații ale particulei cu sarcina q, în cazurile:

a) $Qq > 0$; **b)** $Qq < 0$.

Exprimați în fiecare caz perioada micilor oscilații ale particulei. Se neglijează greutatea particulei față de intensitatea forțelor coulombiene.

1.1.4 Oscilator mecanic liber cu frecare. Amortizarea

Experienţa arată că toţi oscilatorii mecanici liberi efectuează oscilaţii a căror amplitudine scade în timp, numite *oscilaţii amortizate*. Cauza este scăderea energiei mecanice a oscilatorului datorată frecărilor cu mediul în care sistemul oscilează:

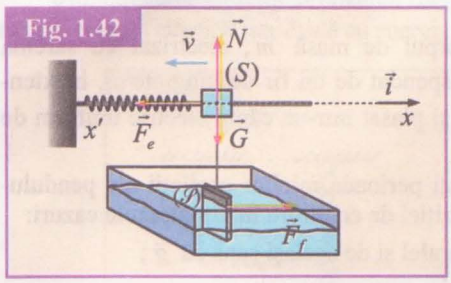
$$\Delta E_m = L_f < 0$$

Energia mecanică este transferată parţial mediului sub formă de căldură şi parţial sistemului însuşi ca energie internă. Scăderea progresivă a energiei mecanice duce la scăderea amplitudinii. Un oscilator neamortizat este un caz ideal.

Se disting două tipuri de amortizare, după cum forţele de frecare sunt datorate unui fluid (gaz, lichid) sau unui solid în contact cu oscilatorul.

Amortizarea fluidă

Fig. 1.42



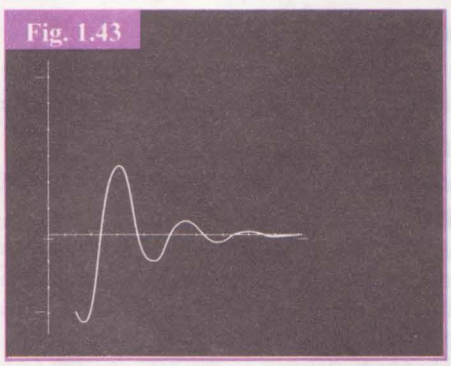
În fig. 1.42 este reprezentat un dispozitiv experimental destinat observării variaţiilor amplitudinii oscilatorului cu frecare vâscoasă. Paleta ataşată oscilatorului este introdusă într-un lichid. În felul acesta, oscilatorul întâmpină la înaintare o forţă de rezistenţă pe care o putem considera proporţională cu viteza lui:

$$\vec{F}_f = -C\vec{v} \qquad (1)$$

Aceasta este responsabilă, în cea mai mare parte, de amortizarea oscilaţiilor.

Constanta C, măsurată în $\mathrm{N \cdot s/m}$, depinde de vâscozitatea fluidului şi de aria secţiunii transversale a corpului în contact cu fluidul. Dacă paleta este cufundată mai adânc în fluid, amortizarea este mai rapidă.

Fig. 1.43



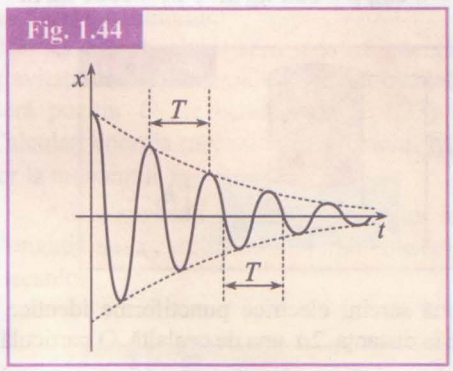
Cu ajutorul unui calculator cu interfaţă (sau a unui osciloscop) se poate vizualiza şi înregistra variaţia în timp a oscilaţiei amortizate (fig. 1.43). Curba obţinută reprezintă variaţia în timp a elongaţiei sistemului. Aceasta nu mai este o sinusoidă, căci amplitudinea scade progresiv.

Totuşi, valorile maxime ale elongaţiei sunt atinse la intervale de timp succesive egale (fig. 1.44). Mişcarea oscilatorie amortizată este numită *pseudoperiodică*, iar T, pseudoperioada acesteia. Pseudoperioada T este puţin mai mare decât perioada proprie T_0 a oscilatorului fără frecări:

$$T > T_0 \qquad (2)$$

şi creşte o dată cu creşterea coeficientului de frecare fluidă C.

Fig. 1.44



Principiul fundamental al dinamicii aplicat, de exemplu, unui oscilator elastic cu frecare fluidă, scris sub forma

$$\vec{F}_f + \vec{F}_e = m\vec{a} \qquad (3)$$

în proiecţie pe direcţia de oscilaţie, devine:

$$a + \frac{C}{m}v + \frac{k}{m}x = 0 \qquad (4)$$

Cum

$$\frac{k}{m} = \omega_0^2 \qquad (5)$$

reprezintă pătratul pulsaţiei proprii în absenţa frecărilor, se obţine ecuaţia:

$$\ddot{x} + \frac{C}{m}\dot{x} + \omega^2 x = 0 \qquad (6)$$

Se demonstrează că pentru $C < 2m\omega_0^2$ (7), soluţia ecuaţiei (6) reprezintă legea unei mişcări oscilatorii de forma:

$$x(t) = \mathcal{A}_0 e^{-\frac{C}{2m}t} \cdot \sin(\omega t + \varphi) \qquad (7)$$

Amplitudinea oscilaţiei:

$$\mathcal{A}(t) = \mathcal{A}_0 e^{-\frac{C}{2m}t} \qquad (8)$$

scade exponenţial cu timpul şi această scădere este cu atât mai accentuată cu cât coeficientul C de frecare vâscoasă este mai mare. Reprezentarea grafică a legii de mişcare este redată în fig. 1.44.

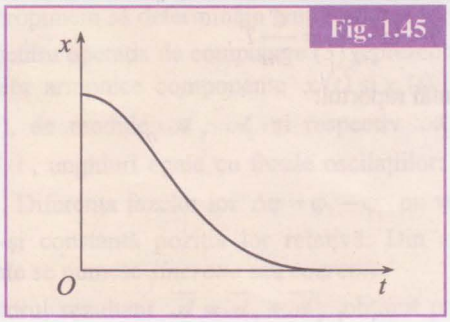


Fig. 1.45

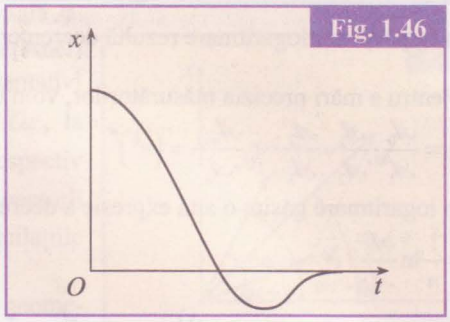


Fig. 1.46

Dacă frecarea devine importantă ($C > 2m\omega_0^2$), oscilatorul, o dată scos din poziția de echilibru, revine în această poziție fără a mai oscila: mișcarea se numește *aperiodică* (fig. 1.45).

Pentru $C = 2m\omega_0^2$, amortizarea este numită *critică* (fig. 1.46).

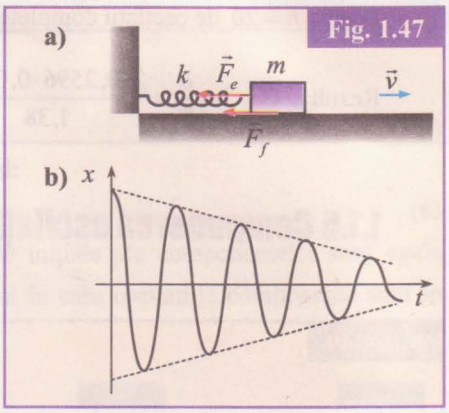


Fig. 1.47

Amortizarea uscată

Amplitudinea mișcării unui oscilator elastic orizontal aflat în contact permanent cu o suprafață plană, cu frecare mică, scade liniar în timp (fig. 1.47.b) până la oprirea definitivă a mobilului. Dacă frecarea este mare, mobilul revine în poziția de echilibru cu viteză nulă și nu mai oscilează.

Exercițiu aplicativ

Enunț: Curba din fig. 1.48 este înregistrarea elongației unui oscilator elastic amortizat.

a) Determinați din grafic pseudoperioada T a acestui oscilator.

b) Admițând că aceasta diferă foarte puțin de perioada proprie a oscilatorului elastic fără frecări, calculați constanta de elasticitate k a resortului, știind că masa oscilatorului este $m = 205{,}9$ g.

c)* Se definește *decrementul logaritmic* δ al oscilației amortizate prin relația:

$$\delta = \ln \frac{\mathcal{A}_n}{\mathcal{A}_{n-1}},$$

unde $\mathcal{A}_n$ și $\mathcal{A}_{n-1}$ sunt două amplitudini consecutive (la interval de o pseudoperioadă) oarecare. Arătați că: $\delta = \frac{C}{2m} \cdot T$.

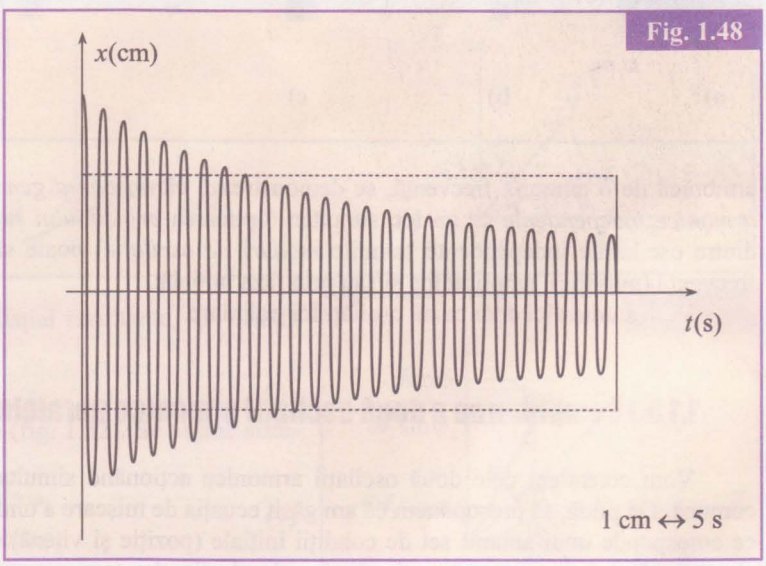


Fig. 1.48

d)* Determinați δ din grafic și apoi calculați coeficientul C de frecare fluidă.

Soluție:

a) Se măsoară durata corespunzătoare celor 20 de perioade: $T = \frac{1}{20} \cdot 5{,}4 \text{ cm} \cdot 5 \frac{\text{s}}{\text{cm}} = 1{,}38 \text{ s}$

b) Cum

$T \approx T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$, prin ridicare la pătrat găsim $k = \frac{4\pi^2 m}{T^2} \cong 4{,}5 \frac{\text{N}}{\text{m}}$

c) Din legea de variație a amplitudinii rezultă:

$\mathcal{A}_n = \mathcal{A}_0 e^{-\frac{C}{2m}nT}$, iar $\mathcal{A}_{n-1} = \mathcal{A}_0 e^{-\frac{C}{2m}(n-1)T}$.

Prin împărțire și logaritmare rezultă decrementul logaritmic: $\delta = \ln\frac{\mathcal{A}_n}{\mathcal{A}_{n-1}} = \frac{C}{2m}T$.

d) Pentru a mări precizia măsurătorilor, vom considera mai întâi raportul:

$$\frac{\mathcal{A}_0}{\mathcal{A}_n} = \frac{\mathcal{A}_0}{\mathcal{A}_1}\cdot\frac{\mathcal{A}_1}{\mathcal{A}_2}\cdot\frac{\mathcal{A}_2}{\mathcal{A}_3}\cdot\ldots\cdot\frac{\mathcal{A}_{n+1}}{\mathcal{A}_n} = \left(e^{\delta}\right)^n$$

Prin logaritmare găsim o altă expresie a decrementului:

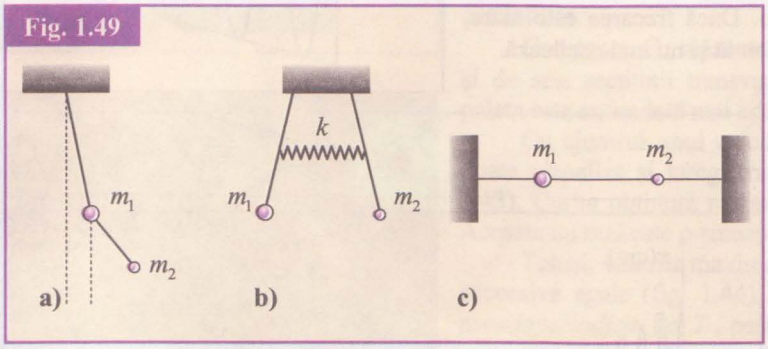
$$\delta = \frac{1}{n}\ln\frac{\mathcal{A}_0}{\mathcal{A}_n}$$

Pentru $n = 20$ de oscilații complete, $\frac{\mathcal{A}_0}{\mathcal{A}_n} = \frac{2{,}6\text{ cm}}{0{,}9\text{ cm}} = 2{,}888$, deci $\delta = \frac{1}{20}\ln 2{,}888 \cong 0{,}0515$

Rezultă: $C = 2m\frac{\delta}{T} = \frac{2\cdot 0{,}2596\cdot 0{,}0515}{1{,}38}\text{ kg s}^{-1} \cong 0{,}0194\text{ kg s}^{-1}$.

1.1.5 Compunerea oscilațiilor

Fig. 1.49



Un sistem oscilant poate fi supus simultan la două sau mai multe mișcări oscilatorii, datorită acțiunii diferitelor perturbații exterioare. Câteva exemple mai simple sunt: pendulul dublu (fig. 1.49.a), două pendule cuplate printr-un resort slab (fig. 1.49.b), o coardă elastică pe care sunt prinse două corpuri punctiforme (fig. 1.49.c). Sistemele acestea prezintă două sau mai multe grade de libertate, adică posibilități de oscilație independente, sub acțiunea a două forțe de revenire diferite. Dacă fiecărui grad de libertate îi corespunde o oscilație liniar armonică de o anumită frecvență, se demonstrează că *mișcarea generală este o superpoziție a celor două mișcări armonice independente* ce au loc simultan (aplicarea *principiului superpoziției* din mecanica newtoniană). Fiecare dintre oscilațiile independente (numite *moduri de oscilație*) poate să difere de cealaltă prin: direcția de oscilație, frecvență (pulsație), amplitudine și/sau prin faza inițială.

Vom studia aici doar cazul oscilațiilor coliniare.

1.1.5.1 Compunerea a două oscilații armonice paralele și de aceeași frecvență

Vom considera cele două oscilații armonice acționând simultan asupra unui punct material după o direcție comună. De pildă, să presupunem că am găsit ecuația de mișcare a unui pendul elastic (punct material + resort elastic) ce corespunde unui anumit set de condiții inițiale (poziție și viteză) și o altă ecuație de mișcare a aceluiași pendul elastic, având deci aceeași direcție și aceeași pulsație, dar care corespunde altui set de condiții inițiale. După cum ați putut observa din exercițiul de la paragraful precedent, condițiile inițiale determină unic amplitudinea și faza inițială a mișcării. Fie deci oscilațiile armonice coliniare (Ox):

$$x_1(t) = \mathcal{A}_1\cdot\sin(\omega t + \varphi_1) \quad (1)$$

$$x_2(t) = \mathcal{A}_2\cdot\sin(\omega t + \varphi_2) \quad (2)$$

Presupunem că dorim să aflăm ecuația mișcării rezultate prin suprapunerea condițiilor inițiale (poziția inițială egală cu suma algebrică a pozițiilor inițiale, iar viteza inițială egală cu suma algebrică a vitezelor inițiale). Noua mișcare va fi rezultatul superpoziției ecuațiilor de mișcare (1) și (2):

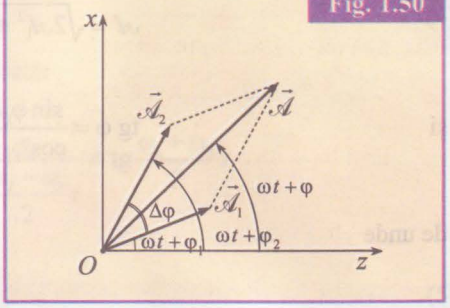
$$x(t) = x_1(t) + x_2(t) \quad (3)$$

Oscilația rezultantă va fi tot o mișcare liniar-armonică, de aceeași pulsație ca și componentele:

$$x(t) = \mathcal{A}\cdot\sin(\omega t + \varphi) \quad (4)$$

Ne propunem să determinăm amplitudinea sa, $\mathcal{A}$, și faza inițială φ utilizând pentru operația de compunere (3) reprezentarea fazorială (Fresnel) a oscilațiilor armonice componente $x_1(t)$ și $x_2(t)$. Fazorii reprezentativi (fig. 1.50), de module $\mathcal{A}$, $\mathcal{A}_1$ și respectiv $\mathcal{A}_2$, fac cu axa Oz, la momentul t, unghiuri egale cu fazele oscilațiilor: $(\omega t+\varphi_1)$ și respectiv $(\omega t+\varphi_2)$. Diferența fazelor lor $\Delta\varphi=\varphi_2-\varphi_1$ nu variază în timp, vectorii păstrându-și constantă poziția lor relativă. Din acest motiv, oscilațiile componente se numesc *sincrone* sau *coerente*.

Fig. 1.50



Vectorul rezultant $\vec{\mathcal{A}}=\vec{\mathcal{A}}_1+\vec{\mathcal{A}}_2$ obținut prin compunere geometrică (regula paralelogramului) se va roti cu aceeași viteză unghiulară ca și $\vec{\mathcal{A}}_1$ și $\vec{\mathcal{A}}_2$.

Modulul rezultantei va fi:

$$\mathcal{A}^2=\mathcal{A}_1^2+\mathcal{A}_2^2+2\mathcal{A}_1\mathcal{A}_2\cos\Delta\varphi \tag{5}$$

Cum $-1\le\cos\Delta\varphi\le 1$, rezultă că amplitudinea este cuprinsă în intervalul:

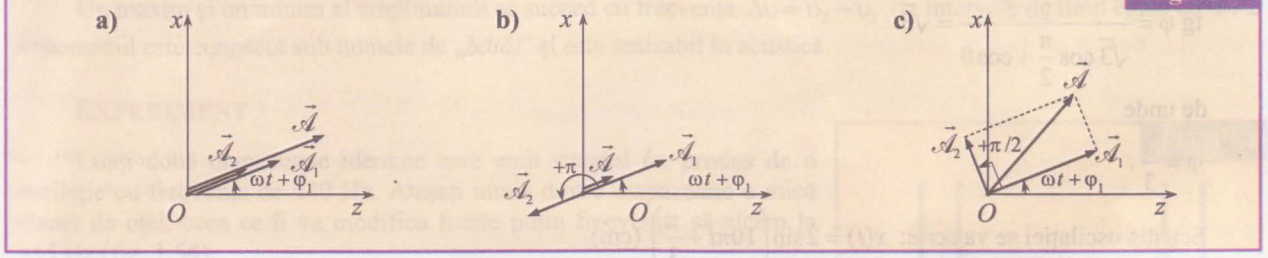
$$|\mathcal{A}_1-\mathcal{A}_2|\le\mathcal{A}\le\mathcal{A}_1+\mathcal{A}_2 \tag{6}$$

Valoarea maximă $\mathcal{A}_{max}=\mathcal{A}_1+\mathcal{A}_2$ corespunde situației în care fazele inițiale ale componentelor sunt egale (oscilații în fază, fig. 1.51.a), iar valoarea minimă $\mathcal{A}_{min}=|\mathcal{A}_1-\mathcal{A}_2|$, cazului în care oscilațiile componente sunt în opoziție de fază: $|\varphi_1-\varphi_2|=\pi$ (fig. 1.51.b).

Dacă oscilațiile x_1 și x_2 sunt în cuadratură $\Delta\varphi=\pm\frac{\pi}{2}$, ca în fig. 1.51.c:

$$\mathcal{A}=\sqrt{\mathcal{A}_1^2+\mathcal{A}_2^2} \tag{7}$$

Fig. 1.51



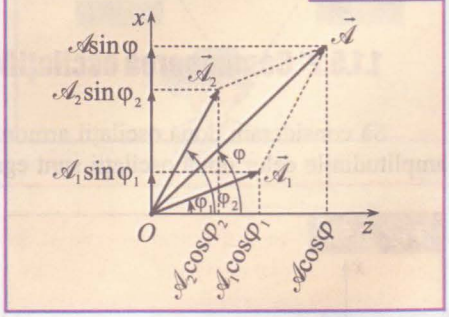
Pentru determinarea fazei inițiale a oscilației rezultante, φ, relația vectorială:

$$\vec{\mathcal{A}}=\vec{\mathcal{A}}_1+\vec{\mathcal{A}}_2 \tag{8}$$

se proiectează pe cele două axe de coordonate (fig. 1.52). Se obține sistemul de ecuații:

$$\begin{cases}\mathcal{A}\sin\varphi=\mathcal{A}_1\sin\varphi_1+\mathcal{A}_2\sin\varphi_2\\ \mathcal{A}\cos\varphi=\mathcal{A}_1\cos\varphi_1+\mathcal{A}_2\cos\varphi_2\end{cases} \tag{9}$$

Fig. 1.52



Prin împărțirea lor membru cu membru, găsim:

$$\operatorname{tg}\varphi=\frac{\mathcal{A}_1\sin\varphi_1+\mathcal{A}_2\sin\varphi_2}{\mathcal{A}_1\cos\varphi_1+\mathcal{A}_2\cos\varphi_2} \tag{10}$$

În cazurile particulare prezentate în fig. 1.51, faza inițială a oscilației rezultante:

a) are valoarea $\varphi=\varphi_1=\varphi_2$ dacă oscilațiile componente sunt în fază;

b) are valoarea φ_1 dacă $\mathcal{A}_1>\mathcal{A}_2$ și respectiv $\varphi_2=\varphi_1+\pi$ dacă $\mathcal{A}_2>\mathcal{A}_1$ în cazul compunerii a două oscilații în opoziție de fază;

c) are valoarea $\varphi=\varphi_1\pm\operatorname{arctg}\frac{\mathcal{A}_2}{\mathcal{A}_1}$, dacă cele două oscilații componente sunt în cuadratură avans, respectiv retard (în urmă), fig. 1.51.c).

Când oscilațiile componente au aceeași amplitudine $\mathcal{A}_1 = \mathcal{A}_2$, obținem

$$\mathcal{A} = \sqrt{2\mathcal{A}_1^2 + 2\mathcal{A}_1^2 \cos\Delta\varphi} = \sqrt{2\mathcal{A}_1^2(1+\cos\Delta\varphi)} = 2\mathcal{A}_1 \cos\frac{\Delta\varphi}{2} \quad (11)$$

și

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{\sin\varphi_1 + \sin\varphi_2}{\cos\varphi_1 + \cos\varphi_2} = \frac{2\sin\dfrac{\varphi_1+\varphi_2}{2}\cos\dfrac{\varphi_1-\varphi_2}{2}}{2\cos\dfrac{\varphi_1+\varphi_2}{2}\cos\dfrac{\varphi_1-\varphi_2}{2}} = \operatorname{tg}\frac{\varphi_1+\varphi_2}{2} \quad (12)$$

de unde

$$\varphi = \frac{\varphi_1+\varphi_2}{2} \quad (13)$$

Exercițiu aplicativ

Enunț: Legea de mișcare a unui oscilator are forma:

$$x(t) = \sqrt{3}\cos 10\pi t + \sin 10\pi t \text{ (cm)}$$

Calculați: **a)** amplitudinea oscilatorului; **b)** faza inițială a oscilației.

Soluție: Oscilația poate fi privită ca rezultat al compunerii oscilațiilor paralele și de aceeași pulsație:

$$x_1(t) = \sqrt{3}\cos 10\pi t = \sqrt{3}\sin\left(10\pi t + \frac{\pi}{2}\right) \text{ și } x_2(t) = \sin 10\pi t$$

a) Aplicând relația (5) pentru $\mathcal{A}_1 = \sqrt{3}$ cm, $\mathcal{A}_2 = 1$ cm și $\Delta\varphi = \dfrac{\pi}{2}$, găsim amplitudinea oscilației date: $\mathcal{A} = \sqrt{\mathcal{A}_1^2 + \mathcal{A}_2^2} = 2$ cm

b) Pentru aflarea fazei inițiale a mișcării utilizăm relația (10):

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{\sqrt{3}\sin\dfrac{\pi}{2} + \sin 0}{\sqrt{3}\cos\dfrac{\pi}{2} + \cos 0} = \sqrt{3}$$

de unde

$$\varphi = \frac{\pi}{3}.$$

Ecuația oscilației se va scrie: $x(t) = 2\sin\left(10\pi t + \dfrac{\pi}{3}\right)$ (cm)

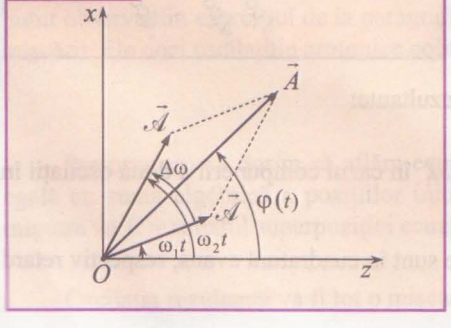
1.1.5.2* Compunerea oscilațiilor paralele cu frecvențe puțin diferite. Fenomenul de bătăi

Să considerăm două oscilații armonice paralele având frecvențe puțin diferite. Pentru simplitate, considerăm că amplitudinile celor două oscilații sunt egale și, de asemenea, că fazele lor inițiale sunt egale (se poate demonstra că defazajul introdus de faze inițiale diferite nu influențează fenomenul):

$$x_1(t) = \mathcal{A}\sin(\omega_1 t + \varphi) \quad (1)$$

$$x_2(t) = \mathcal{A}\sin(\omega_2 t + \varphi) \quad (2)$$

Fig. 1.53



Diferența pulsațiilor $\Delta\omega = \omega_2 - \omega_1$ are o valoare foarte mică ($\Delta\omega \ll \omega_1$, $\Delta\omega \ll \omega_2$).

Amplitudinea mișcării rezultante se determină din diagrama fazorială ridicată la momentul t (fig. 1.53).

$$A^2 = \mathcal{A}^2 + \mathcal{A}^2 + 2\mathcal{A}^2\cos\Delta\omega t =$$

$$= 2\mathcal{A}^2(1+\cos\Delta\omega t) =$$

$$= 4\mathcal{A}^2\cos^2\frac{\Delta\omega}{2}t \quad (3)$$

Rezultă că amplitudinea este funcție periodică de timp:

$$A(t) = 2\mathcal{A}\cos\frac{\Delta\omega}{2}t \qquad (4)$$

Faza instantanee $\varphi(t)$ a oscilației rezultante este dată de relația cunoscută:

$$\operatorname{tg}\varphi(t) = \frac{\mathcal{A}\sin\omega_1 t + \mathcal{A}\sin\omega_2 t}{\mathcal{A}\cos\omega_1 t + \mathcal{A}\cos\omega_2 t} = \frac{2\sin\frac{\omega_1+\omega_2}{2}t\cdot\cos\frac{\omega_2-\omega_1}{2}t}{2\cos\frac{\omega_1+\omega_2}{2}t\cdot\cos\frac{\omega_2-\omega_1}{2}t} = \operatorname{tg}\frac{\omega_1+\omega_2}{2}t$$

De aici rezultă pentru faza oscilației expresia:

$$\varphi(t) = \frac{\omega_1+\omega_2}{2}t \qquad (5)$$

Oscilația rezultantă va avea o amplitudine lent variabilă în timp, cu perioada $T = \dfrac{4\pi}{\omega_2-\omega_1}$, cu atât mai mare cu cât diferența pulsațiilor componentelor este mai mică.

În schimb, oscilația rezultantă are pulsația egală cu media aritmetică a celor două pulsații, $\omega_m = \dfrac{\omega_1+\omega_2}{2}$. Perioada corespunzătoare acestei oscilații, $T_m = \dfrac{4\pi}{\omega_1+\omega_2}$, este mult mai mică decât perioada amplitudinii T.

Ecuația mișcării rezultate prin suprapunere se va scrie:

$$x(t) = 2\mathcal{A}\cos\frac{\omega_2-\omega_1}{2}t\cdot\sin\frac{\omega_1+\omega_2}{2}t$$

Sinusoida de pulsație $\omega_m = \dfrac{\omega_1+\omega_2}{2}$ este „modulată" în amplitudine, ale cărei valori devin lent, periodic, maxime sau minime (nule în cazul amplitudinilor egale ale componentelor egale (fig. 1.56).

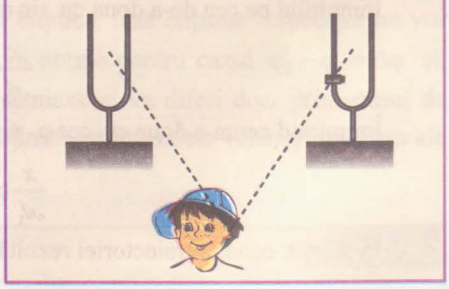
Un maxim și un minim al amplitudinii se succed cu frecvența $\Delta\upsilon = \upsilon_2 - \upsilon_1$ (la intervale de timp egale cu $T/2$). Fenomenul este cunoscut sub numele de *„bătăi"* și este sesizabil în acustică.

EXPERIMENT

Luați două diapazoane identice care emit sunetul *la*, produs de o oscilație cu frecvența de 440 Hz. Atașați unuia dintre diapazoane o mică clamă de oțel, ceea ce îi va modifica foarte puțin frecvența, să zicem la 445 Hz (fig. 1.54).

Excitarea (prin lovire cu un ciocănel) simultană a diapazoanelor produce două sunete care se compun. Indiferent de poziția observatorului (deci de diferența de fază dintre sunete), urechea le percepe ca *bătăi*, adică sub forma unui sunet cu amplitudinea variabilă în timp. Intensitatea sunetului compus crește și slăbește periodic în timp. Urechea nu percepe bătăi pentru $\Delta\upsilon > 10$ Hz.

Fig. 1.54



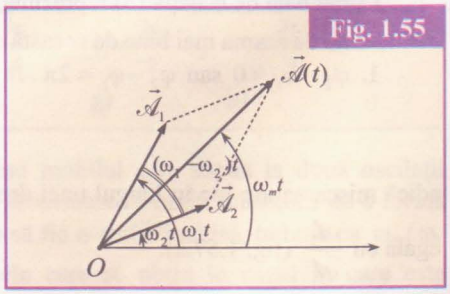
Exercițiu aplicativ

Enunț: Un punct material efectuează simultan două mișcări oscilatorii armonice rectilinii:

$$x_1 = 4\cos 41t \text{ (cm) și } x_2 = 5\cos 40t \text{ (cm)}$$

Pulsațiile $\omega_1 = 41$ rad/ s și $\omega_2 = 40$ rad/ s fiind foarte apropiate, apare fenomenul de bătăi. Calculați amplitudinile maximă și minimă, precum și perioada bătăilor.

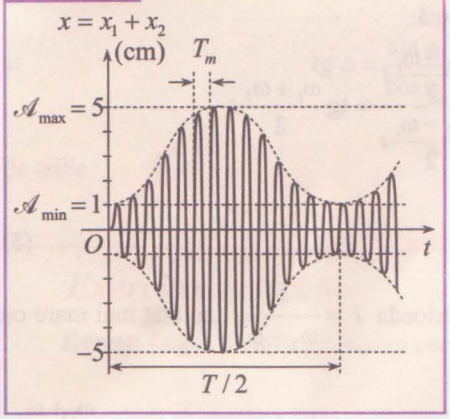
Fig. 1.55



Soluție: Conform diagramei fazoriale de compunere din fig. 1.55 ridicată la momentul t în raport cu axa Ox (pe care se face proiecția fazorilor), amplitudinea rezultantă este:

$$\mathcal{A}^2 = \mathcal{A}_1^2 + \mathcal{A}_2^2 + 2\mathcal{A}_1\mathcal{A}_2\cos(\omega_1-\omega_2)t\,.$$

Fig. 1.56



Numeric: $\mathcal{A}^2(t) = 41 + 40\cos t$

Valoarea maximă se obține la momentul de timp t pentru care $\cos t = 1$ $(t_k = 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z})$ și are valoarea

$$\mathcal{A}_{max} = \sqrt{41+40} = 9 \text{ cm} = \mathcal{A}_1 + \mathcal{A}_2$$

Amplitudinea minimă corespunde lui $\cos t = -1$ $(t' = (2k+1)\pi,\ k \in \mathbb{Z})$ și are valoarea:

$$\mathcal{A}_{min} = \sqrt{41-40} = 1 \text{ cm} = \mathcal{A}_1 - \mathcal{A}_2$$

Perioada bătăilor este:

$$T = \frac{2\pi}{\omega_1 - \omega_2} = 2\pi = 6{,}28 \text{ s}.$$

Observați că perioada oscilației compuse:

$$T = \frac{2\pi}{\omega_m} = \frac{2\pi}{\frac{\omega_1 + \omega_2}{2}} = \frac{4\pi}{81} \text{ s} \approx 0{,}155 \text{ s}$$

este mult mai mică decât perioada bătăilor (fig. 1.56).

1.1.5.3 Compunerea oscilațiilor perpendiculare

Presupunem că un mobil este supus, în același timp la două mișcări oscilatorii de perioade egale, perpendiculare între ele. Alegând cele două direcții de oscilație în lungul axelor Ox și Oy, elongațiile mișcărilor componente vor fi:

$$x = \mathcal{A}_1 \sin(\omega t + \varphi_1),\ y = \mathcal{A}_2 \sin(\omega t + \varphi_2) \tag{1}$$

Pentru a găsi traiectoria, trebuie să eliminăm timpul între cele două ecuații (1). Pentru aceasta, le scriem sub forma:

$$\frac{x}{\mathcal{A}_1} = \sin\omega t \cos\varphi_1 + \cos\omega t \sin\varphi_1$$

$$\frac{y}{\mathcal{A}_2} = \sin\omega t \cos\varphi_2 + \cos\omega t \sin\varphi_2 \tag{2}$$

Înmulțind pe cea de-a doua cu $\sin\varphi_1$ și scăzând-o din prima ecuație înmulțită cu $\sin\varphi_2$ obținem

$$\frac{x}{\mathcal{A}_1}\sin\varphi_2 - \frac{y}{\mathcal{A}_2}\sin\varphi_1 = \sin\omega t \sin(\varphi_2 - \varphi_1)$$

Înmulțind acum a doua cu $\cos\varphi_1$ și scăzând-o din prima înmulțită cu $\cos\varphi_2$ obținem

$$\frac{x}{\mathcal{A}_1}\cos\varphi_2 - \frac{y}{\mathcal{A}_2}\cos\varphi_1 = -\cos\omega t \sin(\varphi_2 - \varphi_1)$$

În sfârșit, ecuația traiectoriei rezultă ridicând la pătrat ultimele două relații și adunându-le membru cu membru,

$$\frac{x^2}{\mathcal{A}_1^2} + \frac{y^2}{\mathcal{A}_2^2} - \frac{2xy}{\mathcal{A}_1\mathcal{A}_2}\cos(\varphi_2 - \varphi_1) = \sin^2(\varphi_2 - \varphi_1) \tag{3}$$

sau

$$y = \frac{\mathcal{A}_2}{\mathcal{A}_1}\left[x\cos(\varphi_2 - \varphi_1) \pm \sqrt{\mathcal{A}_1^2 - x^2}\,\sin(\varphi_2 - \varphi_1)\right] \tag{4}$$

Curba dată de ecuația (3) reprezintă, în general, o elipsă ai cărei parametrii depind de diferența de fază $(\varphi_2 - \varphi_1)$. Pentru a ne da seama mai bine de această dependență, să considerăm câteva cazuri particulare.

1. $\varphi_2 - \varphi_1 = 0$ sau $\varphi_2 - \varphi_1 = 2\pi$. În acest caz, din (4) obținem ecuația unei drepte

$$y = \frac{\mathcal{A}_2}{\mathcal{A}_1}x$$

adică mișcarea are loc în lungul unei drepte care trece prin origine și face cu axa Ox un unghi a cărui tangentă este egală cu $\frac{\mathcal{A}_2}{\mathcal{A}_1}$ (fig. 1.57.a).

Deoarece depărtarea mobilului față de origine va fi

$$\sqrt{x^2+y^2}=\sqrt{1+\frac{\mathcal{A}_2^2}{\mathcal{A}_1^2}}x=\sqrt{\mathcal{A}_1^2+\mathcal{A}_2^2}\sin(\omega t+\varphi),$$

rezultă că mobilul efectuează o mișcare oscilatorie armonică, liniară, de amplitudine $\sqrt{\mathcal{A}_1^2+\mathcal{A}_2^2}$ și pulsație ω (egală cu cea a oscilațiilor componente).

2. $\varphi_2-\varphi_1=\pi$. În acest caz, obținem ecuația

$$y=-\frac{\mathcal{A}_2}{\mathcal{A}_1}x$$

care corespunde unei oscilații liniare în lungul unei drepte care face cu axa Ox un unghi de tangentă $-\frac{\mathcal{A}_2}{\mathcal{A}_1}$, de aceeași perioadă ca în cazul anterior (fig. 1.57.e).

3. $\varphi_2-\varphi_1=\frac{\pi}{2}$ sau $\varphi_2-\varphi_1=\frac{3\pi}{2}$ Din relația (3) obținem expresia

$$\frac{x^2}{\mathcal{A}_1^2}+\frac{y^2}{\mathcal{A}_2^2}=1$$

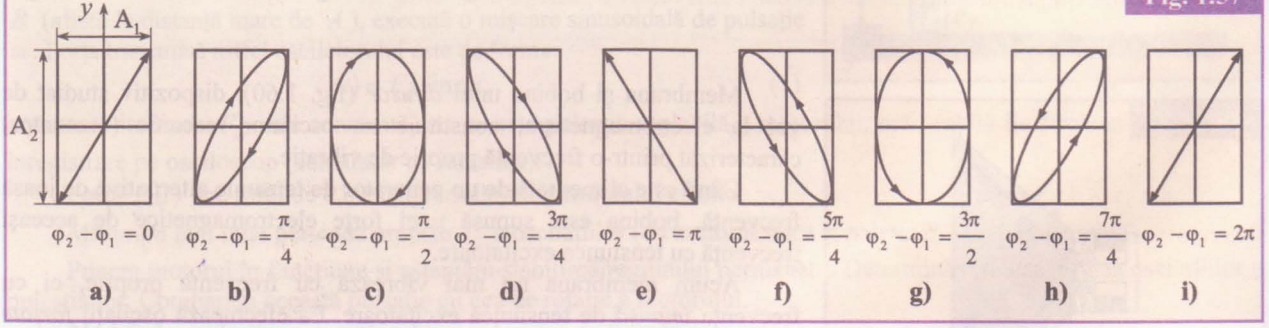
care este ecuația unei elipse de semiaxe $\mathcal{A}_1$ și $\mathcal{A}_2$ (figurile 1.57.c și g). Dacă amplitudinile celor două oscilații sunt egale, $\mathcal{A}_1=\mathcal{A}_2=\mathcal{A}$, atunci traiectoria va fi un cerc de rază $\mathcal{A}$. Situația cu $\varphi_2-\varphi_1=\frac{\pi}{2}$ se deosebește de cea cu $\varphi_2-\varphi_1=\frac{3\pi}{2}$ prin sensul de parcurgere a traiectoriei,

$$x=\mathcal{A}_1\sin(\omega t+\varphi_1),\ y=\mathcal{A}_2\cos\left(\omega t+\varphi_1+\frac{\pi}{2}\right)=-\mathcal{A}_2\sin(\omega t+\varphi_1).$$

Să presupunem acum că la un anumit moment $y=0$ și $x=\mathcal{A}$; în momentul următor, argumentul sinusului crește (deoarece t crește și x rămâne pozitiv, dar y devine negativ, ceea ce înseamnă că mobilul se mișcă în sensul acelor unui ceasornic. Același raționament pentru $\varphi_2=\varphi_1+\frac{3\pi}{2}$ ne conduce la concluzia că mobilul se mișcă în sens invers acelor de ceasornic (figurile 1.57.c și g).

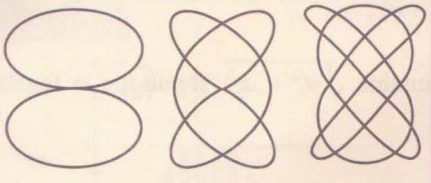
În toate celelalte cazuti (cu $\varphi_2-\varphi_1<2\pi$) obținem din nou traiectorii eliptice, însă elipsele respective nu vor mai fi dirijate în lungul celor două axe de coordonate. Mișcarea care se va obține pentru cazul $\varphi_2-\varphi_1=\Delta\varphi$ și, respectiv, $\varphi_2-\varphi_1=\pi-\Delta\varphi$ va avea loc în lungul unor elipse de aceleași semiaxe și va diferi doar prin sensul de parcurgere al traiectoriei. În fig. 1.57 sunt reprezentate grafic traiectoriile obținute pentru unele valori particulare ale lui $\varphi_2-\varphi_1$.

Fig. 1.57



Ar trebui acum să vedem ce se întâmplă în cazul mai general, când mobilul este supus la două oscilații perpendiculare, însă de pulsații neegale. În acest caz, după calcule ceva mai laborioase se obțin traiectorii de o formă mai complicată, care, în general, nu sunt curbe închise. Pentru ca traiectoria să fie o curbă închisă, trebuie ca ω_2/ω_1 să fie rațional ($\omega_2/\omega_1=n_2/n_1$, unde n_1 și n_2 sunt numere întregi). Curbele care se obțin în cazul în care este

Fig. 1.58



$\omega_2/\omega_1 = \frac{1}{2}$ $\omega_2/\omega_1 = \frac{2}{3}$ $\omega_2/\omega_1 = \frac{3}{4}$

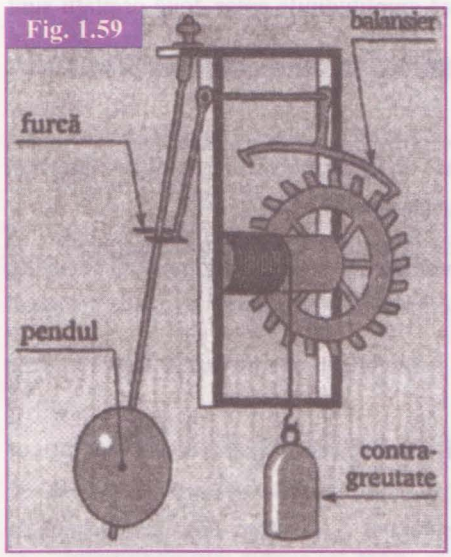
îndeplinită această condiție se numesc *figurile Lissajous*. În fig. 1.58 am reprezentat traiectoriile pentru câteva valori particulare ale raportului ω_2/ω_1.

Menționăm că în cazul în $\omega_2/\omega_1 \neq n_2/n_1$, curba fiind deschisă, mobilul nu va mai trece prin poziția P prin care a trecut la un moment t. Se poate demonstra însă că, după un timp suficient de lung, el poate trece oricât de aproape de această poziție.

1.2 OSCILATORI MECANICI CUPLAȚI

1.2.1 Oscilații întreținute. Oscilații forțate

Fig. 1.59



Pentru a menține constantă amplitudinea unui oscilator mecanic cu frecare, trebuie să i se furnizeze *din exterior un lucru mecanic* care să compenseze pierderile energetice. Oscilațiile se numesc *întreținute*. Spre exemplu, la orologiile vechi, întreținerea oscilațiilor se face prin aporturi energetice bruște și scurte provenind din exterior. Oscilațiile balansierului sunt menținute la o amplitudine constantă de către sistemul ancoră-roată cu dinți, prin care energia greutății care coboară este transmisă prin șocuri (sărituri), în momentul trecerii oscilatorului prin poziția de echilibru (fig. 1.59).

Un copil într-un leagăn își întreține singur oscilațiile prin ghemuiri și destinderi succesive în ritmul oscilațiilor proprii ale leagănului.

Există, de asemenea, posibilitatea de a întreține, într-un sistem oscilant, oscilații a căror frecvență poate fi mult diferită de frecvența lor proprie. Oscilațiile se numesc în acest caz *oscilații forțate*. Această operație necesită intervenția unui al doilea oscilator, cuplat cu primul.

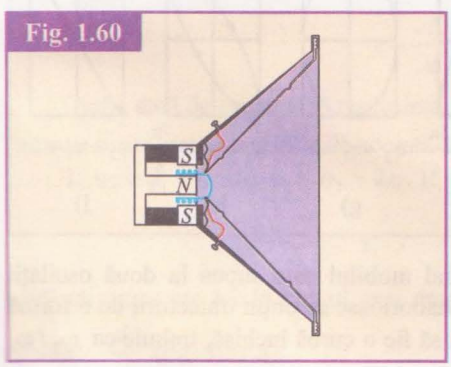
Vom numi primul oscilator, cel care efectuează oscilațiile forțate, *rezonator*. Al doilea oscilator, cel care întreține oscilațiile primului, este numit *excitator*. Vom presupune în cele ce urmează că excitatorul nu suferă reacții din partea rezonatorului.

Excitatorul impune frecvența sa rezonatorului. După stingerea oscilațiilor proprii amortizate, amplitudinea oscilațiilor rezonatorului devine constantă.

Spunem că rezonatorul intră în *regim permanent* cu frecvența excitatorului.

EXPERIMENT 1

Fig. 1.60



Membrana și bobina unui *difuzor* (fig. 1.60), dispozitiv studiat de voi la electromagnetism, constituie un oscilator mecanic (rezonator) caracterizat printr-o frecvență proprie de vibrație.

Când este alimentată de un generator de tensiune alternativă de joasă frecvență, bobina este supusă unei forțe electromagnetice de aceeași frecvență cu tensiunea excitatoare.

Acum membrana nu mai vibrează cu frecvența proprie, ci cu frecvența *impusă* de tensiunea excitatoare. Ea efectuează oscilații *forțate* de amplitudine constantă. Modificând frecvența tensiunii produse de generator, putem observa că amplitudinea oscilațiilor forțate ale membranei se modifică. Amplitudinea vibrațiilor membranei devine maximă când frecvența generatorului se apropie de frecvența proprie de vibrație a membranei. Fenomenul este numit *rezonanță*.

EXPERIMENT 2

Două pendule E şi R sunt fixate pe un tub de cauciuc întins orizontal între doi suporţi rigizi A şi B. Planele lor de oscilaţie sunt paralele (fig. 1.61). Pendulul excitator, E, este constituit dintr-o tijă rigidă în lungul căreia poate culisa un disc de masă mare (circa 1 kg). În felul acesta, frecvenţa oscilaţiilor excitatorului poate fi variată. Dacă pendulul R oscilează în aer, oscilaţiile proprii sunt slab amortizate. Ataşându-i o paletă, care în timpul oscilaţiilor întâmpină rezistenţa unui lichid, amortizarea creşte.

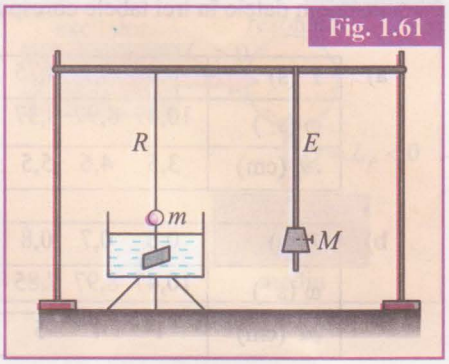


Fig. 1.61

Utilizând un cronometru, măsurăm mai întâi frecvenţa proprie υ_0 a rezonatorului R în aer, menţinând excitatorul în repaus. Punem apoi excitatorul în oscilaţie şi măsurăm frecvenţa sa υ, corespunzătoare unei anumite poziţii a masei M. Observăm că după regularizarea oscilaţiilor, rezonatorul începe să oscileze cu aceeaşi frecvenţă cu cea a excitatorului. Variem frecvenţa υ a excitatorului. Constatăm că oscilaţiile rezonatorului (intrat în regim permanent pe frecvenţa excitatorului) au amplitudini mici, exceptând cazul în care frecvenţa excitatorului, υ, ia o valoare aproximativ egală cu frecvenţa proprie, υ_0, a rezonatorului. Spunem că pendulul R a intrat în rezonanţă cu pendulul E. Rezonanţa este foarte pronunţată (netă) în cazul amortizării slabe.

Dacă mărim amortizarea prin frecarea cu un fluid, constatăm că maximul amplitudinii este mai puţin pronunţat, iar frecvenţa excitatorului la rezonanţă este mai mică decât frecvenţa proprie, υ_0, a rezonatorului. Pentru amortizări mari, fenomenul de rezonanţă dispare.

Dependenţa amplitudinii rezonatorului de frecvenţa (pulsaţia) oscilaţiilor impuse de excitator poartă numele de *curbă de rezonanţă*.

1.2.2 Rezonanţa

EXPERIMENT

Pentru a provoca oscilaţii forţate unui pendul elastic (masă m, resort de constantă de elasticitate k) în cazul frecării fluide ($\vec{F}_f = -C\vec{v}$), se acţionează asupra sistemului cu o forţă periodică de amplitudine constantă şi de frecvenţă (pulsaţie) reglabilă.

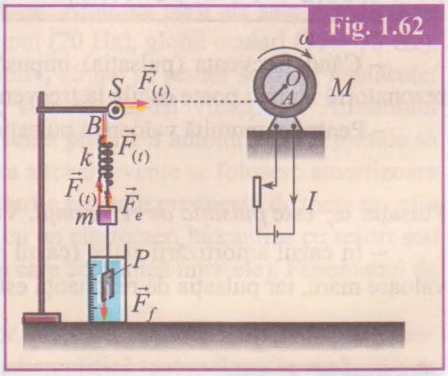


Fig. 1.62

În acest scop, de extremitatea superioară a resortului se leagă un fir elastic, lung, trecut peste un scripete şi fixat cu celălalt capăt, excentric, la un motor de curent continuu. Frecvenţa motorului poate fi variată montând în circuitul său de alimentare un reostat, care permite creşterea sau scăderea intensităţii curentului. Când extremitatea A a firului elastic descrie o mişcare circulară de viteză unghiulară ω reglabilă, cealaltă extremitate a sa, B (aflată la distanţă mare de A), execută o mişcare sinusoidală de pulsaţie ω. Forţa transmisă astfel oscilatorului este de forma:

$$F(t) = F_m \sin \omega t \qquad (1)$$

unde amplitudinea F_m este constantă, iar ω este pulsaţia reglabilă a motorului, măsurabilă fie stroboscopic, fie prin înregistrare pe osciloscop (calculator cu interfaţă).

Forţa $F(t)$ are rolul de a întreţine oscilaţiile pendulului elastic.

Măsurăm mai întâi perioada proprie T_0 a oscilaţiilor (cu motorul oprit şi paleta P scoasă din lichid).

Punem motorul în funcţiune şi aşteptăm stabilirea regimului permanent. Determinăm amplitudinea oscilaţiilor şi pulsaţia lor. Comparăm această pulsaţie cu cea de rotaţie a motorului.

Modificăm pulsaţia ω a motorului şi măsurăm de fiecare dată amplitudinea $\mathcal{A}$ a oscilaţiilor forţate.

Studiem trei cazuri:

a) oscilaţiile masei m au loc în aer;

b) oscilaţiile masei m cu paleta P (foarte uşoară) scufundată în apă;

c) oscilaţiile cilindrului de masă m cufundat complet în apă.

Aceste cazuri corespund unei amortizări slabe, uneia medii şi respectiv unei amortizări puternice, produse de forţe de frecare fluidă de diferite intensităţi.

Înscriem datele în trei tabele corespunzătoare fiecărui caz studiat:

a)

T (s)	0,6	0,7	0,75	0,8	0,9	1,0	1,1	1,3	1,5	1,6	1,8	2,3	3,2	5
ω (s^{-1})	10,47	8,97	8,37	7,85	6,97	6,28	5,71	4,83	4,18	3,92	3,49	2,73	1,96	1,26
$\mathcal{A}$ (cm)	3,5	4,6	5,5	6	7,5	17,5	22	20	13	12	7	4	3	2

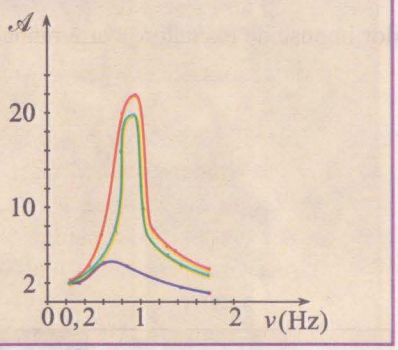
b)

T (s)	0,6	0,7	0,8	1	1,1	1,3	1,4	2,3	3,4	5,3	7,9
ω (s^{-1})	10,47	8,97	7,85	6,28	5,71	4,83	4,48	2,73	1,85	1,18	0,80
$\mathcal{A}$ (cm)	1	4	5	10	20	16	7,5	3,5	2,5	2	2

c)

T (s)	0,6	0,7	0,9	1,1	1,2	1,7	2,2	2,8	3,3	4,3	5,1
ω (s^{-1})	10,47	8,97	6,98	5,71	5,23	3,69	2,85	2,24	1,90	1,46	1,23
$\mathcal{A}$ (cm)	1	1,3	2,3	3,2	3,6	4,3	3	2,4	2	2	2

Fig. 1.63



Perioada proprie a oscilatorului elastic utilizat a fost $T_0 = 1{,}05$ s, iar pulsaţia proprie $\omega_0 = \dfrac{2\pi}{T_0} = 5{,}89$ rad s^{-1}.

Am trasat pe acelaşi grafic, în culori diferite, dependenţa $\mathcal{A}(f)$ în fiecare din cazurile avute în vedere (fig. 1.63).

Valorificarea rezultatelor

Analiza curbelor de rezonanţă trasate arată că:

– În toate cazurile când pulsaţia (frecvenţa) impusă de excitator, ω, tinde către zero, amplitudinea tinde către o valoare-limită impusă de amplitudinea forţei sinusoidale de întreţinere, F_m.

– Când frecvenţa (pulsaţia) impusă este foarte mare, amplitudinea tinde spre zero. Din cauza inerţiei mari, rezonatorul nu mai poate oscila la frecvenţele mari impuse de excitator.

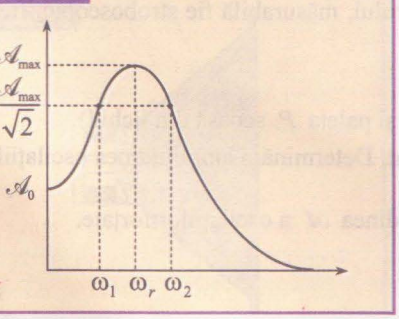
– Pentru o anumită valoare a pulsaţiei impuse, ω_r, curba trece printr-un maxim al amplitudinii,

$$\mathcal{A}_{max} = \mathcal{A}(\omega_r)$$

Pulsaţia ω_r este *pulsaţia de rezonanţă*. Valoarea sa este inferioară pulsaţiei proprii ω_0 a rezonatorului.

– În cazul amortizării slabe (cazul a)), rezonanţa este pronunţată, curba este îngustă, maximul amplitudinii are valoare mare, iar pulsaţia de rezonanţă este foarte apropiată de pulsaţia proprie ω_0.

Fig. 1.64



– Cu cât amortizarea este mai mare (cazurile b) şi c)) rezonanţa este mai puţin pronunţată, curba mai plată, maximul amplitudinii are valoare mai redusă, iar frecvenţa (pulsaţia) de rezonanţă este clar inferioară celei proprii, $\omega_r < \omega_0$.

Pentru a caracteriza numeric lărgimea curbei de rezonanţă, se defineşte *banda de trecere*. Banda de trecere (zisă de 3 decibeli (dB)) *este intervalul de frecvenţe (pulsaţii) pentru care amplitudinea* $\mathcal{A}$ *îndeplineşte condiţia:*

$$\mathcal{A} > \frac{\mathcal{A}_{max}}{2}$$

unde $\mathcal{A}_{max}$ este amplitudinea la rezonanţă (fig. 1.64).

– Intervalul $\Delta\omega = \omega_2 - \omega_1$ între valorile extreme ω_1 şi ω_2 ale benzii de trecere se numeşte *lărgime de bandă*.

Aspecte energetice

Bilanțul energetic al sistemului oscilant care execută oscilații forțate (rezonatorul) este redat în fig. 1.65. Acesta:

– primește lucrul mecanic $L_e > 0$ pe care i-l furnizează excitatorul (lucrul mecanic al forței de întreținere);

– transferă energie spre exterior sub formă de căldură, Q, corespunzătoare lucrului $L_f < 0$ al forțelor de frecare.

Dacă amplitudinea oscilațiilor forțate rămâne constantă și, în consecință, energia mecanică medie a sistemului rămâne constantă, rezultă $L_e > |L_f|$.

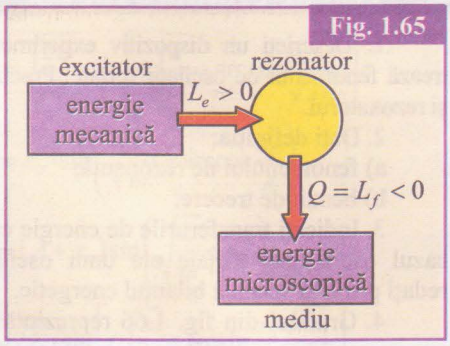


Fig. 1.65

1.2.3 Consecințe și aplicații

În practică există situații în care fenomenul de rezonanță trebuie evitat. Astfel, în industrie, oscilațiile forțate pun probleme serioase mașinilor cu componente ce execută mișcări periodice. Mișcarea de rotație a unei roți masive poate determina vibrații nedorite ale arborelui și ale suporților de sprijin. Astfel, la motoarele prost echilibrate poate să se producă ruperea arborelui sau a batiului dacă frecvența de vibrație devine egală cu frecvența proprie a acestora.

Înțelegem acum că echilibrarea roților unui vehicul este necesară pentru a evita vibrații de amplitudine mare ale direcției. Totodată pentru protecția vehiculului și a călătorilor acesta este dotat cu amortizoare auto (cu arc) a cărui terminație este cufundată într-un cilindru ce conține un lichid capabil să preia șocurile care ar duce la fenomenul de rezonanță.

Construcțiile foarte înalte (zgârie-norii) au de asemenea sisteme de atenuare a vibrațiilor care le-ar putea face să intre în rezonanță periclitând securitatea acestora. Reglementările militare și civile prevăd traversarea podurilor fără cadență pentru a preîntâmpina intrarea acestora în rezonanță și atingerea unor amplitudini de oscilație prea mari, capabile să distrugă structura lor de rezistență. Este cunoscută în istorie ruperea podului de pe Maine în 1850 în timpul traversării acestuia de către o trupă care mergea în cadență. În 1940 podul Tacoma Narrows s-a prăbușit datorită rezonanței dezastruoase provocate de rafalele de vânt a căror frecvență coincidea cu cea a podului.

Corpul uman este și el un sistem mecanic mai mult sau mai puțin amortizat. Anumite părți ale sale posedă frecvențe proprii de vibrație: aparatul digestiv (1 Hz), masa abdominală (3 Hz), capul (20 Hz), globii oculari (35 – 75 Hz). Supuse vibrațiilor exterioare, aceste părți pot intra în rezonanță. Din acest motiv, atunci se resimt senzații neplăcute: dureri de cap, rău de mare, rău de mașină. Când călătorim cu mașina, suntem supuși vibrațiilor. Ansamblul caroserie-suspensie constituie un oscilator. Pentru confortul pasagerilor, frecvența proprie a autoturismului trebuie să fie egală cu o frecvență apropiată de cea a mersului (1,3 Hz). Pentru absorbirea altor frecvențe se folosesc amortizoare din ce în ce mai perfecționate. Ele absorb totodată șocurile violente și zguduiturile repetate provocate de toate tipurile de terenuri. Furcile amortizoare pot fi cu un resort unic, cu resort în asociere cu un elastomer, hidraulice cu resort sau oleopneumatice (două compartimente: unul cu ulei și altul cu aer sub presiune care comunică între ele). Fenomenul de rezonanță poate fi în unele cazuri util:

– la *cutiile de rezonanță* ale instrumentelor muzicale și ale diapazoanelor, din care, datorită vibrațiilor unei mase de aer, sunetele ies întărite (amplificate). Acești rezonatori nu sunt selectivi, ei amplifică toate vibrațiile cu frecvențe între 20 Hz – 20 000 Hz (audibile);

– *timpanul* urechii, *placa* unui receptor *telefonic*, *membrana* unui *difuzor* sau a unui *microfon* sunt oscilatori cu amortizare puternică. Ei pot intra în vibrații forțate sub acțiunea unor excitatori externi (sunete sau forțe electromagnetice variabile periodic în timp), reproducând fidel vibrațiile excitatorului pentru o gamă largă de frecvențe (vezi paragraful „Elemente de acustică");

– *mareele* sunt rezultatul unor oscilații forțate. Oscilatorul este masa de apă a oceanelor, iar excitatorii sunt Luna și Soarele. Sub efectul fenomenului de rezonanță, amplitudinea mareelor poate deveni, în anumite golfuri, foarte mare. Acolo, apa prezintă o perioadă proprie de oscilație (modul de „clătinare") de ordinul a 12 h, perioadă apropiată de cea a mareelor (12 h 25 min), care este determinată de perioada de rotație a Soarelui (24 h 50 min) și a Lunii (23 h 56 min) față de sistemul de referință al Pământului. În acest caz apare rezonanța, care amplifică fenomenul; în astfel de golfuri, mareea înaltă (fluxul) are amplitudini de 10 m, în timp ce în larg amplitudinea nu depășește 0,3 m. Energia mareelor de mare amplitudine este folosită în centrale electrice.

Test de evaluare rapidă

1. Descrieți un dispozitiv experimental care ilustrează fenomenul de oscilații forțate. Precizați excitatorul și rezonatorul.

2. Dați definiția:

a) fenomenului de rezonanță;

b) benzii de trecere.

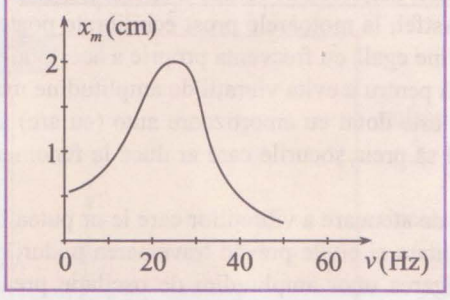
3. Indicați transferurile de energie care intervin în cazul oscilațiilor forțate ale unui oscilator mecanic; redați printr-o schemă bilanțul energetic.

4. Graficul din fig. 1.66 reprezintă curba de răspuns a unui sistem oscilant supus unor oscilații forțate. Determinați:

a) frecvența de rezonanță;

b) lărgimea benzii de trecere.

Fig. 1.66



5. Una din roțile unui automobil este prost echilibrată. Centrul său de greutate se află puțin în afara axului de rotație. Când automobilul se deplasează cu viteză constantă, roata se comportă ca un excitator pentru ansamblul caroseriei. Schimbătorul de viteză vibrează cu o amplitudine crescută pentru $\nu = 120$ km/h. Calculați frecvența de rezonanță a schimbătorului de viteză. Diametrul roților este $d = 0{,}6$ m.

6. O pistă de încercări prezintă denivelări (înrețituri) care se succed regulat la distanța $l = 0{,}6$ m. Un automobil parcurge această pistă cu o viteză constantă, v.

a) La ce intervale de timp trece roata automobilului de la o ridicătură la alta? Deduceți frecvența fenomenului.

b) Oscilatorul constituit din roată, resortul suspensiei și amortizor este caracterizat de frecvența proprie $\upsilon_0 = 5$ Hz. Supus impulsurilor roții, acest oscilator se află în regim forțat. Pentru ce valoare v_0 a vitezei oscilatorul riscă să intre în rezonanță?

c)* Raportul dintre frecvența proprie a acestui oscilator, υ_0, și lărgimea benzii de trecere, $|\upsilon_1 - \upsilon_2|$, se numește factor de calitate, $Q = \dfrac{\upsilon_0}{|\upsilon_1 - \upsilon_2|}$, și are valoarea 4.

Determinați cu aproximație intervalul de viteze ce trebuie evitate pentru a nu provoca oscilații de prea mare amplitudine.

Test sumativ – Oscilații mecanice

1. Referitor la mișcarea oscilatorie armonică, dintre afirmațiile de mai jos, care este falsă?

a) Amplitudinea mișcării este constantă.

b) Energia totală a oscilatorului liniar armonic este constantă în timp.

c) Energia potențială maximă depinde de timp.

d) Faza inițială depinde de poziția și viteza inițială.

e) Relația între elongație și viteză este: $v = \pm\omega\sqrt{A^2 - y^2}$.

2. Un corp cu masa $m = 2$ kg, pornind din repaus, execută o mișcare oscilatorie armonică.

Pentru a îndepărta corpul din poziția de echilibru până într-un punct A, situat la distanța maximă față de poziția de echilibru, se consumă un lucru mecanic de 23 mJ, iar în punctul A, asupra corpului acționează o forță de 1,15 N, îndreptată spre poziția de echilibru. Care este ecuația mișcării corpului?

a) $y = 8\sin 120t$ (m);

b) $y = 2\sin 120t$ (cm);

c) $y = 2\sin 120t$ (m);

d) $y = 4\sin 200t$ (cm);

e) $y = 4\sin 100t$ (m).

3. Un punct material cu masa $m = 1$ kg oscilează după legea: $y = 5\sin\dfrac{\pi}{5}t$ (m).

Expresiile energiei cinetice (E_c), energiei potențiale (E_p) și energiei totale (E_t) ale punctului material sunt:

a) $E_c = E_p = E_t = 5\cos^2\dfrac{\pi}{5}t$ (J);

b) $E_c = E_p = E_t = 5\sin^2\dfrac{\pi}{4}t$ (J);

c) $E_c = E_p = 5\cos^2\dfrac{\pi}{5}t$ (J), $E_t = 5$ J;

d) $E_c = E_p = 5\sin^2\dfrac{\pi}{5}t$ (J), $E_t = 5$ J;

e) $E_c = 5\cos^2\dfrac{\pi}{5}t$ (J), $E_p = 5\sin^2\dfrac{\pi}{5}t$ (J), $E_t = 5$ J.

4. Un punct material execută o mișcare armonică după ecuația $y = \mathcal{A}\sin\left(\dfrac{\pi}{6}t\right)$ m.

În cât timp punctul material parcurge:

a) drumul de la poziția de echilibru la elongația maximă;

b) prima jumătate a drumului cerut la punctul a)?

a) 3 s; 1 s; **b)** 2 s; 1 s; **c)** 3 s; 2 s; **d)** 6 s; 2 s; **e)** 3 s; 0,5 s

5. Într-un ascensor se află un pendul elastic şi unul gravitaţional. Când ascensorul se află în repaus, raportul perioadelor lor de oscilaţie este n_1. Dacă ascensorul urcă uniform accelerat, raportul perioadelor lor devine n_2. Acceleraţia ascensorului este:

a) $a = g\dfrac{\left(n_2^2 + n_1^2\right)}{n_1^2}$; **b)** $a = g\dfrac{\left(n_2^2 - n_1^2\right)}{n_1^2}$;

c) $a = g\dfrac{n_1 - n_2}{n_2}$; **d)** $a = g\dfrac{n_1 + n_2}{n_1}$; **e)** $a = g\dfrac{n_1^2}{n_2^2}$

6. Un oscilator armonic de masă m şi de constantă de elasticitate k are, la $t_0 = 0$, elongaţia x_0 şi energia E. În funcţie numai de aceşti parametri, elongaţia oscilatorului la momentul t poate fi exprimată prin relaţia:

a) $x(t) = \sqrt{\dfrac{2E}{k}} \cdot \sin\left[t\sqrt{\dfrac{k}{m}} + \arcsin\dfrac{x_0\sqrt{k}}{\sqrt{2E}}\right]$;

b) $x(t) = x_0 \cdot \sin\left(\sqrt{\dfrac{k}{m}}t + \arccos\dfrac{x_0}{A}\right)$;

c) $x(t) = (A + x_0)\sin\left(\sqrt{\dfrac{k}{m}} + \varphi_0\right)$;

d) $x = \sqrt{2E} \cdot \sin\left[t\sqrt{\dfrac{k}{m}} + \arcsin\dfrac{x_0\sqrt{km}}{\sqrt{2E}}\right]$;

e) $x = \sqrt{2E} \cdot \sin\left(t\dfrac{k}{\sqrt{m}} + \arccos\dfrac{x_0}{A}\right)$.

Răspunsuri: 1. c; **2.** d; **3.** e; **4.** a; **5.** b; **6.** a.

1.3 UNDE MECANICE. PROPAGAREA UNDELOR MECANICE

1.3.1 Propagarea unei perturbaţii într-un mediu elastic. Transferul de energie

Suntem familiarizaţi cu fenomenul numit undă, pe care îl sesizăm frecvent în viaţa cotidiană. Valurile produse de vânt sau de o piatră pe suprafaţa apei (fig. 1.67), sunetele emise de corzile unei viori (fig. 1.68) sau de tuburile de orgă (fig. 1.69) sunt doar câteva manifestări ale acestui fenomen în medii materiale elastice.

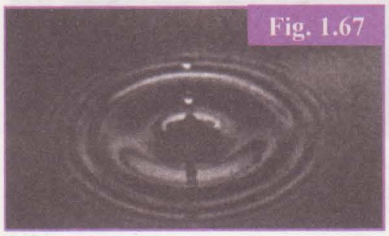


Fig. 1.67

Fig. 1.68

Fig. 1.69

EXPERIMENT 1

Aveţi la dispoziţie o coardă elastică lungă (furtun de cauciuc de 4-5 m). Întindeţi coarda pe orizontală (fig. 1.70) şi izbiţi-o puternic în vecinătatea unuia dintre capete, provocându-i o deformare (perturbaţie) de scurtă durată, perpendicular pe direcţia sa. Aceasta constituie un *puls* (semnal de scurtă durată).

Veţi putea observa propagarea pulsului de la un capăt la altul al corzii.

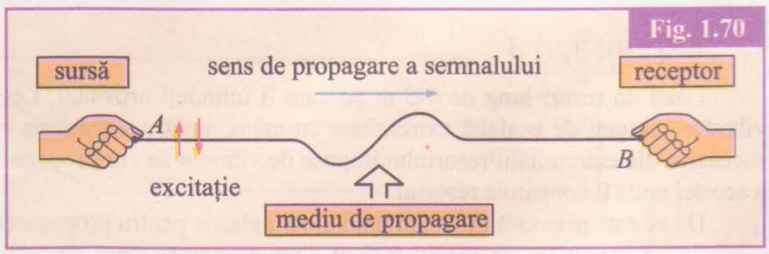
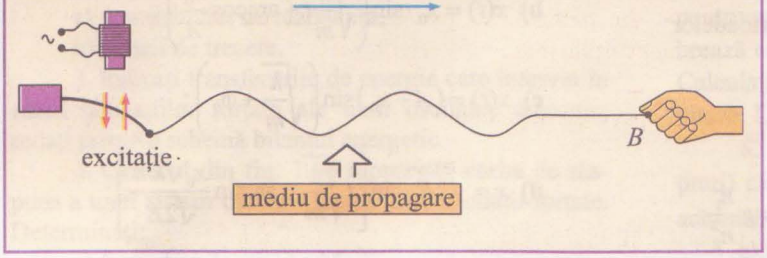


Fig. 1.70

EXPERIMENT 2

Fig. 1.71



Luați un fir de oțel de câțiva metri; legați lamela unui vibrator electromagnetic la unul dintre capete și întindeți firul trăgând de celălalt capăt. Conectați electromagnetul vibratorului la o sursă de tensiune alternativă (fig. 1.71). Veți observa în aceste condiții propagarea unei deformări sinuoase de la un capăt la altul al firului. Ați realizat propagarea unei oscilații neîntrerupte, numită *undă progresivă elastică*, în mediul elastic constituit de firul de oțel.

Unda este numită progresivă deoarece înaintează de la un capăt la altul al firului și elastică deoarece propagarea ei se datorează elasticității mediului.

EXPERIMENT 3

Pentru a observa undele la suprafața apei, dispunem de o cuvă dreptunghiulară transparentă în care se toarnă apă. Cuva se așază pe retroproiector. Pe ecran apare imaginea suprafeței apei. Într-un punct al acesteia plasăm un vârf metalic fin conectat la un vibrator și care lovește vertical suprafața apei, producând o vibrație cu frecvența tensiunii de alimentare a vibratorului.

Pe ecran veți observa o serie continuă de cercuri concentrice care se propagă de la vârf spre marginile cuvei (fig. 1.72). Vârful constituie sursa undei, iar suprafața apei, mediul elastic de propagare. Elasticitatea acesteia este conferită de existența tensiunilor superficiale.

Înlocuind vârful vibratorului cu o rigletă perpendiculară pe suprafața apei, veți observa înaintarea unei unde cu aspect rectiliniu (fig. 1.73).

Fig. 1.72

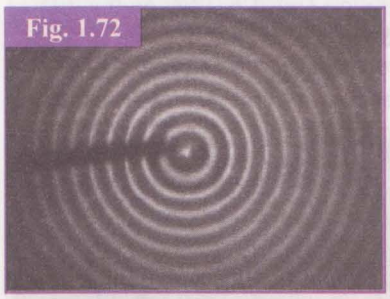


Fig. 1.73

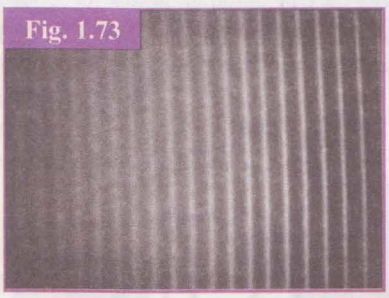
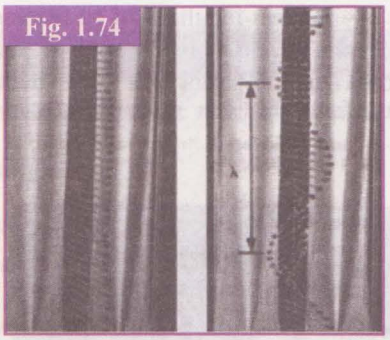


Fig. 1.74



EXPERIMENT 4

Pentru observarea undelor progresive vom utiliza acum aparatul Weller: pe un fir de nylon întins vertical sunt dispuse la distanțe egale tije orizontale de aceeași lungime. Fixând un vibrator la extremitatea primei tije, veți putea observa propagarea unei unde. Fiecare tijă reproduce succesiv mișcarea oscilatorie a primeia (fig. 1.74).

EXPERIMENT 5

Luați un resort lung de 4-5 m pe care îl întindeți orizontal. Legați una dintre extremitățile sale de lama unui vibrator. Trageți de cealaltă extremitate cu mâna, pentru a tensiona resortul (fig. 1.75). Comprimările și alungirile succesive ale extremității resortului impuse de vibrator se vor propaga în lungul acestuia. Mediul elastic de propagare a acestei unde îl constituie resortul.

De ce este necesară existența unui mediu elastic pentru propagarea undelor mecanice?

Să ne imaginăm un mediu format dintr-un număr mare de particule, fiecare fiind cuplată cu vecinele ei prin legături elastice. Dacă una dintre ele este perturbată printr-un impuls mecanic, adică scoasă din poziția de echilibru,

deplasarea nu apare imediat în toate celelalte puncte ale mediului. Perturbația inițială dă naștere unei forțe elastice care acționează asupra particulei imediat vecine; aceasta se deplasează, generând la rândul său o forță elastică ce acționează asupra următoarei particule, și așa mai departe. Având în vedere inerția particulelor, propagarea perturbației de la una la cealaltă nu se produce instantaneu, ci cu o viteză finită ce depinde de natura mediului elastic. Prin perturbația aplicată primei particule se transferă acesteia energie mecanică din exterior. Când particula exercită asupra particulei vecine o forță elastică, are loc un transfer de energie în urma căruia energia primei particule scade, iar energia vecinei crește. Transferul energetic are loc din particulă în particulă pe tot parcursul procesului de propagare. După trecerea perturbației, particulele își reiau pozițiile inițiale de echilibru.

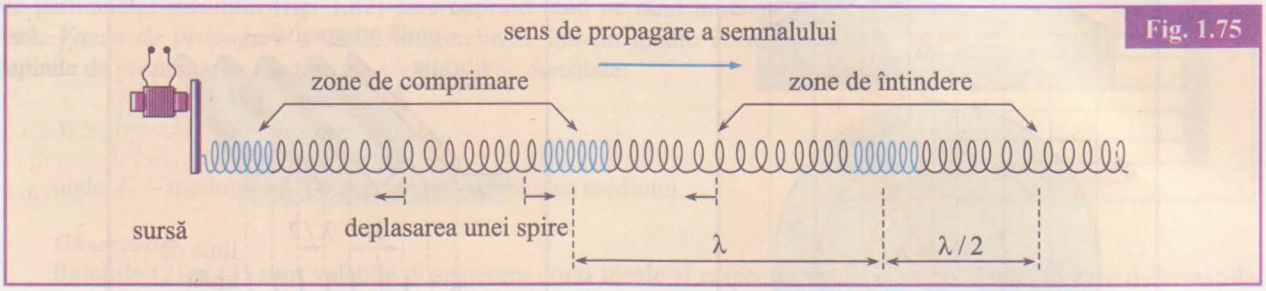


Fig. 1.75

EXPERIMENT 6

Să considerăm un șir de bile de oțel identice, echidistante, suspendate prin fire de aceeași lungime (fig. 1.76).

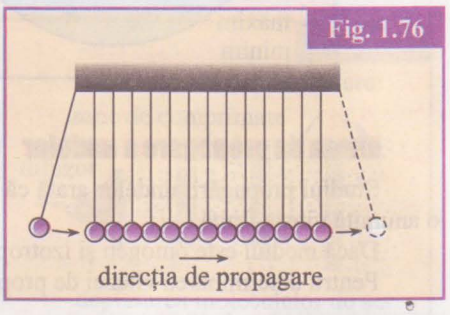


Fig. 1.76

Îndepărtăm ușor din poziția de echilibru prima bilă și o lăsăm liberă. Ea ciocnește bila cea mai apropiată. Sub efectul ciocnirii, aceasta începe să se miște, ciocnește bila următoare și așa mai departe. Ciocnirile succesive transmit perturbația de la un capăt la altul al șirului de bile. După trecerea perturbației, fiecare dintre bile efectuează câteva oscilații repede amortizate, revenind rapid în poziția ei inițială de echilibru. Șirul de bile nu este deplasat în mod permanent în timpul propagării. Aceasta presupune doar transfer energetic de la o bilă la alta și nu un transport de substanță. Ne putem convinge de acest adevăr dacă punem pe suprafața apei, pe care se propagă o undă, un dop de plută. El va oscila vertical când este atins de valuri, fără ca acestea să-l antreneze în sensul propagării. Trecerea undei nu produce nici un transport de materie de la un punct la altul al suprafeței apei.

În concluzie, propunem următoarea *definiție*:

Numim undă mecanică fenomenul de propagare a unei perturbații într-un mediu elastic, omogen, infinit, realizată prin transfer energetic din aproape în aproape într-o anumită direcție și fără transport de substanță.

În cazul utilizării unei surse de oscilații neîntrerupte, putem observa că fiecare punct al mediului efectuează în timp oscilații de aceeași frecvență cu cele ale sursei în contact cu mediul. În fig. 1.77 sunt redate aspecte succesive ale corzii (firului de oțel) în diferite momente ale propagării undei. Remarcați pozițiile succesive ocupate de punctul M al corzii în raport cu poziția sa inițială de echilibru. *Direcția acestei oscilații este perpendiculară pe direcția de propagare*. Vorbim despre o *undă transversală*.

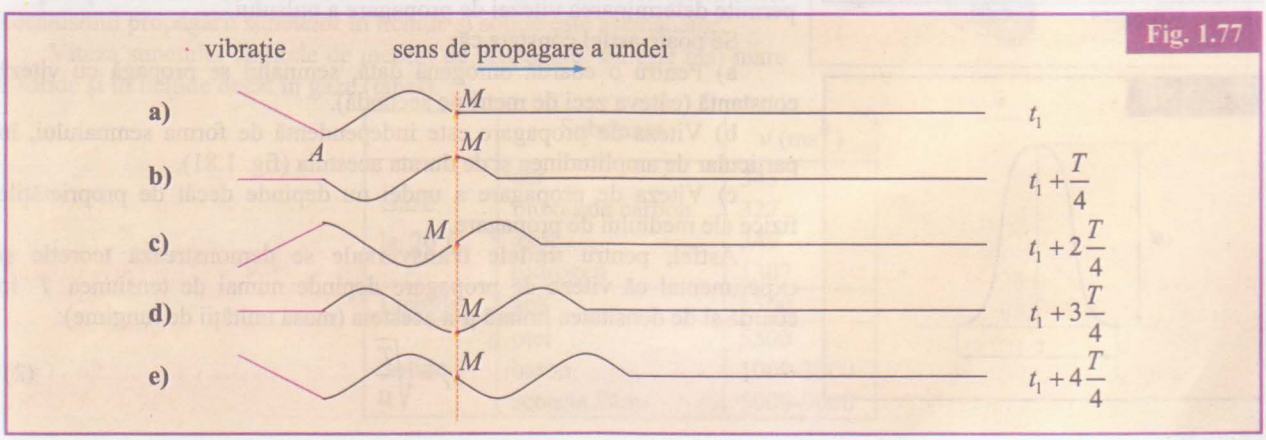


Fig. 1.77

Atât undele circulare, cât şi cele liniare produse pe suprafaţa apei sunt transversale (fig. 1.78 şi 1.79).

Undele produse în lungul resortului elastic lung prin comprimări şi alungiri succesive imprimate de un vibrator sunt *unde longitudinale* (fig. 1.75). Vopsiţi cu alb un grup de 2-3 spire alăturate. Urmăriţi mişcările acestora în timpul propagării undei. Veţi observa că ele *oscilează pe o direcţie ce coincide cu direcţia de propagare*.

Nici în acest caz nu există transport de materie: fiecare spiră vibrează slab în jurul poziţiei iniţiale fără a fi transportată de la un capăt la altul al resortului. Unda transferă în schimb energie de la spiră la spiră.

Fig. 1.78

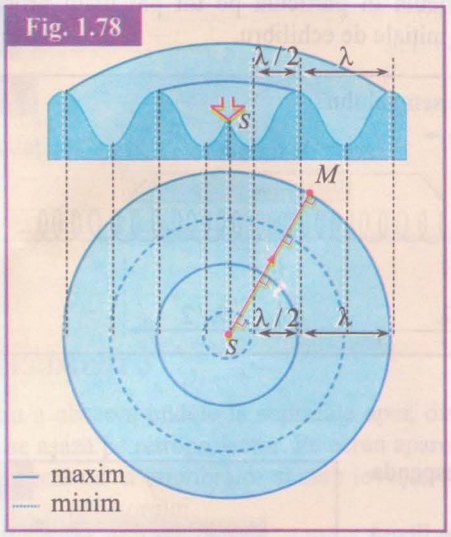
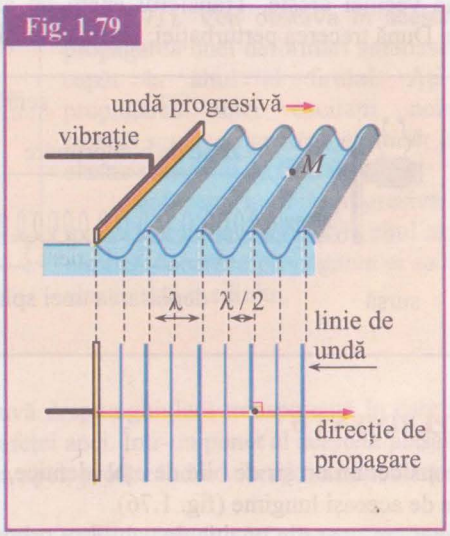


Fig. 1.79



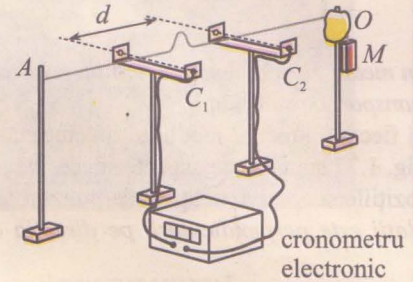
Viteza de propagare a undelor

Studiul propagării undelor arată că pentru a ajunge de la sursă până într-un anumit punct, acestea se propagă cu o anumită viteză finită.

Dacă mediul este omogen şi izotrop, viteza de propagare are aceeaşi valoare în toate punctele acestuia.

Pentru determinarea vitezei de propagare într-un fir metalic (coardă) întins, vă propunem următorul experiment:

Fig. 1.80



Folosim dispozitivul experimental din fig. 1.80. Firul metalic este tensionat prin suspendarea de una din extremităţi a masei M. Valoarea acesteia poate fi variată, pentru a urmări dependenţa vitezei de propagare de tensiunea $\vec{T}$ din fir. Extremitatea corzii este legată de un bloc de material absorbant (burete) pentru a se evita reflexia undelor.

Se produce o deformare instantanee (puls) la capătul A al firului. Trecerea pulsului prin dreptul senzorilor C_1 şi C_2 ai cronometrului electronic permite măsurarea intervalului de timp t necesar propagării sale pe direcţia $d = \overline{C_1C_2}$.

Raportul: $$v = \frac{d}{t} \qquad (1)$$

permite determinarea vitezei de propagare a pulsului.

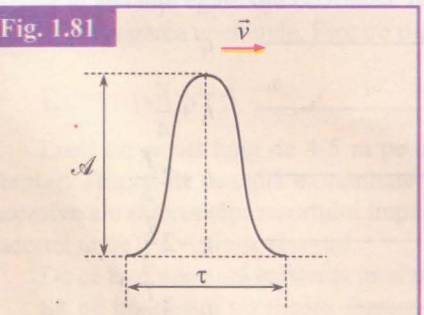
Se poate astfel constata că:

a) Pentru o coardă omogenă dată, semnalul se propagă cu viteză constantă (câteva zeci de metri pe secundă).

b) Viteza de propagare este independentă de forma semnalului, în particular de amplitudinea şi de durata acestuia (fig. 1.81).

c) Viteza de propagare a undei nu depinde decât de proprietăţile fizice ale mediului de propagare.

Fig. 1.81



Astfel, pentru **undele transversale** se demonstrează teoretic şi experimental că viteza de propagare depinde numai de tensiunea T în coardă şi de densitatea liniară μ a acesteia (masa unităţii de lungime):

$$v_t = \sqrt{\frac{T}{\mu}} \qquad (2)$$

Cu cât masa M atârnată de coardă este mai mare, deci cu cât aceasta este mai tensionată, viteza de propagare măsurată prin experimentul descris va fi mai mare. Schimbând coarda inițială cu una a cărei densitate liniară este mai mare, se constată, pentru aceeași tensiune, o scădere a vitezei de propagare.

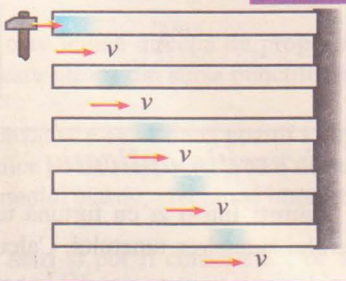
Undele longitudinale

Undele longitudinale sunt caracteristice mediilor solide și gazelor. Ca și în cazul resortului, o bară metalică elastică lovită brusc longitudinal la capătul liber propagă acest puls prin comprimări și întinderi succesive ale particulelor mediului (fig. 1.82) care cuprind rând pe rând întreaga bară. *Viteza de propagare* a undei longitudinale într-un mediu elastic depinde de proprietățile elastice ale acestuia și de densitate:

$$v_l = \sqrt{\frac{E}{\rho}} \quad (3)$$

unde E – modulul lui Young, iar ρ – densitatea mediului.

Fig. 1.82



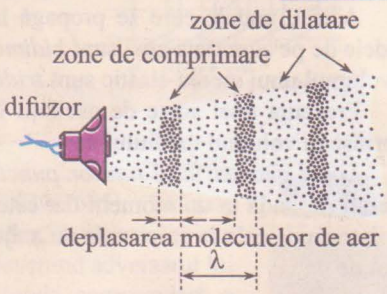
Observație

Relațiile (2) și (3) sunt valabile doar pentru corzi ideale și respectiv medii elastice ideale, în care deformațiile longitudinale nu provoacă și deformații transversale și invers.

Undele sonore

Vibrațiile membranei unui difuzor legat la un generator de semnal sinusoidal de joasă frecvență (frecvență audio) constituie o *sursă sonoră*. Vibrațiile sonore se transmit din aproape în aproape (în gaze, lichide sau solide), constituind o *undă sonoră*. Un receptor (urechea, microfonul) așezat la o anumită distanță de sursa sonoră recepționează oscilațiile mediului în punctul în care este plasat, sub forma unui sunet (vezi paragraful „Elemente de acustică"). În aer, unda sonoră se propagă prin comprimări și destinderi succesive ale păturilor de aer pe direcția de propagare (fig. 1.83). Peste mișcarea haotică a moleculelor se suprapune o mișcare oscilatorie a cărei direcție coincide cu direcția de propagare a sunetului.

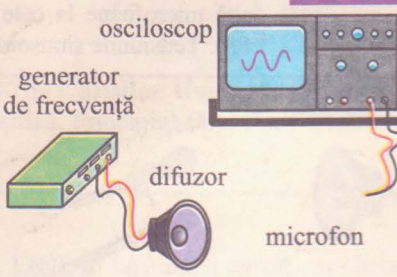
Fig. 1.83



Moleculele de aer în oscilație produc o creștere locală a presiunii (comprimare) urmată de o scădere locală a acesteia (dilatare). Ordinul de mărime al acestora este de 0,1 Pa, adică $\frac{1}{10^6}$ din presiunea atmosferică normală.

Variațiile locale ale presiunii aerului antrenează timpanul urechii sau membrana unui microfon într-o mișcare oscilatorie forțată de aceeași frecvență cu cea a sursei sonore care generează unda. Un microfon conectat la osciloscop redă caracterul sinusoidal al oscilațiilor de presiune într-un punct de pe direcția de propagare (fig. 1.84).

Fig. 1.84



Aceste oscilații locale de presiune se propagă, afectând din aproape în aproape mediul (aerul). *Undele sonore sunt unde longitudinale.* Mecanismul propagării sunetelor în lichide și solide este asemănător.

Viteza sunetului depinde de mediul de propagare. Ea este mai mare în solide și în lichide decât în gaze (tabel).

	Substanța	v (ms^{-1})
Gaze la 20°C	aer	343
	bioxid de carbon	327
	azot	349
	hidrogen	1307
Lichide	apă	1500
Solide	oțel	5500
	beton	1000-2000
	scoarța Păm.	5000-9000

Se demonstrează teoretic şi se confirmă experimental (tabel) că viteza sunetului într-un gaz depinde de temperatura absolută T a acestuia şi de natura lui:

$$c = \sqrt{\frac{\gamma RT}{\mu}} \qquad (4)$$

unde γ – indicele adiabatic, μ – masa molară a gazului, iar c – viteza de propagare a sunetului.

$t(^\circ C)$	–20	0	20
$c_{aer}(ms^{-1})$	319	331	342

Exerciţiu aplicativ

Enunţ: Într-o zi cu furtună un observator cronometrează intervalul de timp $\Delta t = 4$ s scurs între observarea fulgerului şi auzirea tunetului. Calculaţi distanţa de la observator la punctul în care s-a produs fulgerul, considerând viteza de propagare a sunetului în aer 340 ms^{-1}. Se va neglija durata propagării luminii.

Soluţie: Se consideră mediul de propagare omogen.

Rezultă $d = c \cdot \Delta t = 340\ ms^{-1} \cdot 4\ s = 1360\ m \approx 1{,}4\ km$.

Front de undă. Suprafaţă de undă. Principiul lui Huygens

Undele pot fi unidimensionale, bidimensionale sau tridimensionale, în funcţie de numărul de direcţii (dimensiuni) în care mediul elastic permite propagarea.

Astfel, undele care se propagă în lungul unei corzi elastice sau în lungul unui resort sunt *unidimensionale.* Undele de pe suprafaţa apei sunt *bidimensionale.* Undele emise radial în toate direcţiile de o sursă punctiformă plasată în volumul unui mediu elastic sunt *tridimensionale.*

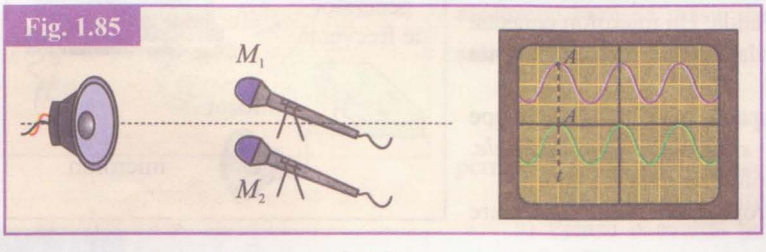
Prezenţa unei surse de oscilaţii într-un mediu elastic pune în oscilaţie din aproape în aproape toate punctele cuprinse în volumul mediului dat.

Locul geometric al tuturor punctelor până la care a ajuns unda la un moment dat se numeşte ***frontul undei.*** Frontul de undă la un moment dat este suprafaţa ce separă punctele mediului care au fost deja cuprinse de procesul oscilatoriu de cele în care unda nu a ajuns încă, până la acel moment. Având în vedere acest fapt, unda are *un singur* front de undă.

EXPERIMENT

În faţa unui difuzor conectat la un generator de joasă frecvenţă, plasaţi două microfoane unul lângă celălalt. Conectaţi cele două microfoane la cele două intrări ale unui osciloscop cu dublu spot sau cu un spot şi comutator electronic (fig. 1.85). Tensiunile sinusoidale captate de cele două microfoane reproduc oscilaţiile de presiune ale aerului antrenat de unda sonoră în cele două puncte.

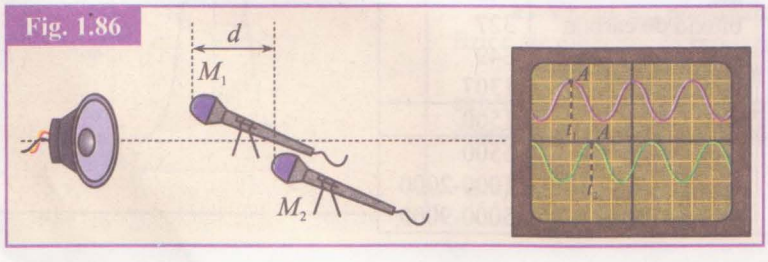
Fig. 1.85



Maximele celor două semnale sunt atinse simultan; la fel minimele sau anularea tensiunilor. Putem afirma că oscilaţiile în puctele M_1 şi M_2 sunt *în fază.*

Lăsaţi unul din microfoane fix şi deplasaţi-l pe cel de al doilea astfel încât cele două semnale să rămână în fază. Marcaţi pe o foaie de hârtie orizontală poziţiile succesive ale microfonului deplasat. Precizaţi forma curbei obţinute prin deplasarea microfonului.

Fig. 1.86



Curba descrisă are forma unui arc de cerc având raza egală cu distanţa de la difuzor la microfoane. Ea reprezintă, în fapt, intersecţia cu planul foii a unei suprafeţe sferice de aceeaşi rază, numită *suprafaţă de undă.*

Numim **suprafaţă de undă locul geometric al punctelor ce oscilează în fază.**

În cazul unei surse punctiforme, de dimensiuni mici în raport cu distanţa la care

am plasat receptorul (analizorul, observatorul) şi într-un mediu *omogen* şi *izotrop*, suprafeţele de undă sunt *sfere concentrice*, având sursa în centru. *Undele sferice* se propagă în toate direcţiile cu aceeaşi viteză.

Observaţie

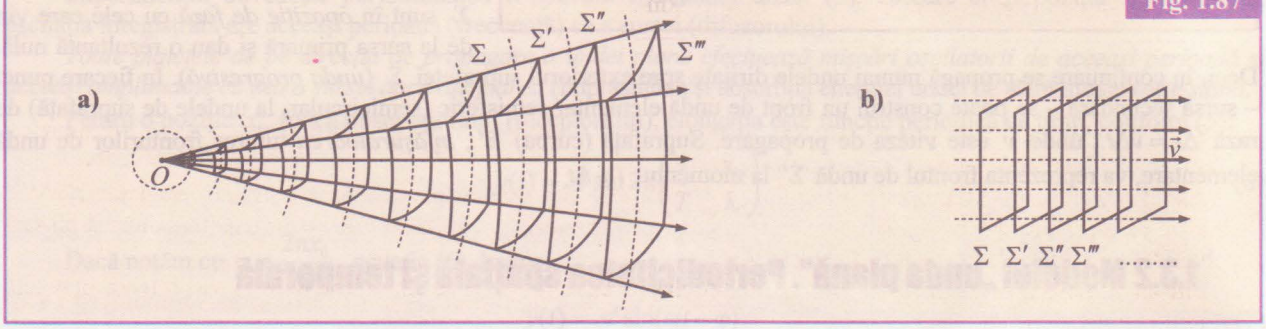
Suprafaţa de undă poate fi dusă prin orice punct al spaţiului care a intrat în procesul de oscilaţie. *Numărul suprafeţelor de undă este infinit.* Aceste suprafeţe sunt fixe şi trec prin poziţiile de echilibru ale particulelor care oscilează cu aceeaşi fază.

Într-un mediu omogen şi izotrop, linia perpendiculară pe frontul de undă care indică direcţia de propagare a energiei undelor se numeşte *rază.* La undele sferice, razele sunt direcţiile radiale care pleacă din sursa punctiformă în toate direcţiile (fig. 1.87.a).

Deplasarea microfonului în lungul unei raze face ca între oscilaţiile corespunzătoare celor două poziţii să apară un defazaj (fig. 1.86). Veţi remarca de asemenea micşorarea amplitudinii oscilaţiilor pe măsura îndepărtării de sursă, fenomen numit *atenuare* şi datorat *absorbţiei* unei părţi a energiei undei de către mediul elastic, precum şi împrăştierii (difuziei) undelor.

La distanţe mari de sursă, suprafeţele de undă sferice au raze de curbură mari şi pot fi considerate, pe zone restrânse, aproximativ plane. Unda a cărei suprafaţă de undă este un plan se numeşte *undă plană* (fig. 1.87.a).

Fig. 1.87



Undele *plane* se propagă într-o *singură direcţie.* Razele sunt drepte paralele cu direcţia de propagare, perpendiculare pe suprafeţele de undă plane (fig. 1.87.b).

Undele pe suprafaţa apei generate de un vârf vibrator au frontul de undă circular, iar cele generate de o rigletă vibratoare, o linie dreaptă (fig. 1.78, 1.79). Suprafeţele de undă se reduc la cercuri concentrice şi respectiv la drepte paralele.

Fig. 1.88

Christian Huygens (1629-1695), fizician, matematician şi astronom olandez. A elaborat prima teorie ondulatorie a luminii, devenind adversarul lui Newton, care fundamentase teoria corpusculară a luminii. Controversa a durat în lumea ştiinţifică până la Einstein (1905).

Opere: „Tratat asupra luminii", „Despre oscilaţiile orologiilor".

Construcţia suprafeţelor de undă se bazează pe **principiul** enunţat în 1690 de **Christian Huygens**.

El i-a verificat valabilitatea, fără însă a-i da o demonstraţie riguros ştiinţifică. Principiul său a fost fundamentat mult mai târziu prin teoria generală a elasticităţii.

EXPERIMENT

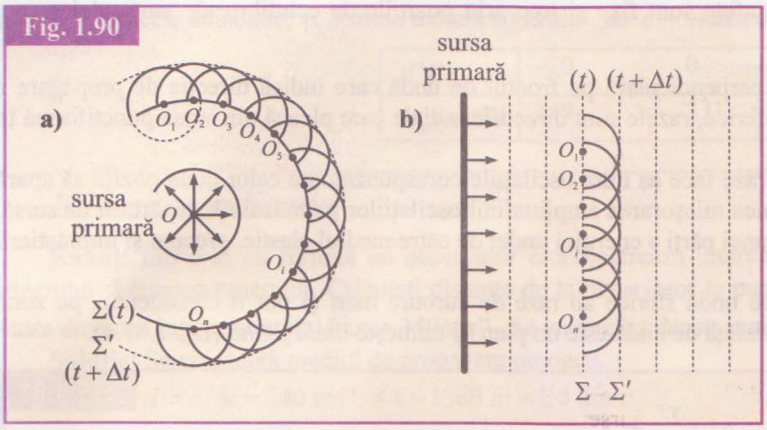
Pe suprafaţa liniştită a unui lichid (apă, mercur) se propagă o undă (fig. 1.89). În faţa undei aşezaţi un obstacol în care s-a prevăzut un mic orificiu. Indiferent de forma undei ce se propagă de la sursa primară, se constată că orificiul se comportă ca o sursă elementară (punctiformă) de oscilaţii, care dă naştere unei unde ce se propagă de cealaltă parte a obstacolului şi ale cărei suprafeţe de undă sunt arce concentrice de cerc (respectiv sfere concentrice, într-un mediu omogen tridimensional). Fenomenul poartă numele de *difracţie* şi este cu atât mai bine sesizat cu cât deschiderea obstacolului este mai apropiată de lungimea de undă, λ, definită ca distanţa parcursă de undă în timp de o perioadă a oscilaţiei propagate.

Fig. 1.89

Acest experiment ne sugerează că **fiecare punct al mediului până la care a ajuns frontul de undă poate fi considerat ca o sursă elementară (secundară) de oscilaţii. Undele care se propagă în exteriorul unei suprafeţe închise în interiorul căreia se află sursa primară,**

determinate de aceasta, sunt identice ca formă şi efect cu undele care s-ar obţine prin suprimarea sursei primare şi înlocuirea ei cu surse elementare secundare convenabil alese pe suprafaţa închisă. Frontul de undă la un moment ulterior se găseşte ca înfăşurătoare a suprafeţelor de undă corespunzătoare surselor secundare de oscilaţii *(principiul lui Huygens).*

Fig. 1.90

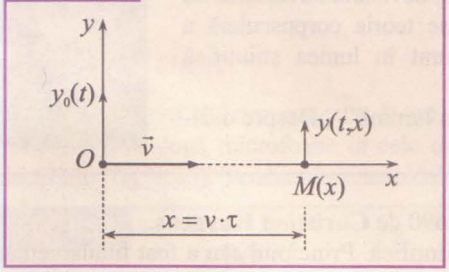


Dacă această suprafaţă este chiar frontul de undă Σ la un moment oarecare t, principiul lui Huygens ne permite să construim frontul de undă Σ' la momentul imediat următor, $t+\Delta t$. Pentru aceasta, vom considera fiecare punct al frontului de undă Σ, la momentul t, o sursă secundară de oscilaţie, din care se propagă unde de aceeaşi formă. Undele produse de sursele secundare se propagă atât spre interiorul suprafeţei Σ, spre sursa primară, cât şi în exteriorul acesteia (fig. 1.90 a, b). Undele care se îndreaptă spre interiorul suprafeţei Σ sunt în *opoziţie de fază* cu cele care vin de la sursa primară şi dau o rezultantă nulă. Deci, în continuare se propagă numai undele dirijate spre exteriorul suprafeţei Σ (*unda progresivă*). În fiecare punct – sursă secundară – se poate construi un front de undă elementar semisferic (semicircular, la undele de suprafaţă) de rază $\Delta r = v\Delta t$, unde v este viteza de propagare. Suprafaţa (curba) Σ', *înfăşurătoarea* tuturor fronturilor de undă elementare, va reprezenta frontul de undă Σ' la momentul $t+\Delta t$.

1.3.2 Modelul „unda plană". Periodicitatea spaţială şi temporală

Să considerăm o undă generată de o sursă de oscilaţii liniar armonice care se propagă într-o singură direcţie (undă plană) într-un mediu omogen şi izotrop.

Fig. 1.91



Fie Ox direcţia sa de propagare cu viteza v constantă (fig. 1.91). Amplitudinea oscilaţiilor oricărui punct al mediului se consideră constantă în timpul propagării.

Raţionamentul următor este valabil atât pentru undele transversale, cât şi pentru cele longitudinale. Vom considera că oscilaţiile armonice ale sursei, plasate în O, au loc în lungul axei Oy şi sunt de forma:

$$y_0(t) = \mathcal{A} \sin \omega t = \mathcal{A} \sin 2\pi \frac{t}{T} \tag{1}$$

unde $\mathcal{A}$ – amplitudinea oscilaţiei, ω – pulsaţia, iar T – perioada acesteia.

O particulă a mediului aflată pe direcţia de propagare a undei plane în punctul M de abscisă $\overline{OM} = x$ va intra în oscilaţie după intervalul de timp

$$\tau = \frac{x}{v} \tag{2}$$

Luând ca origine a timpului momentul în care sursa O începe să oscileze, elongaţia punctului M se va scrie:

$$y = \mathcal{A} \sin \omega(t-\tau) = \mathcal{A} \sin \frac{2\pi}{T}\left(t - \frac{x}{v}\right) \tag{3}$$

Definim *lungimea de undă* (λ) ca fiind *distanţa parcursă de undă în timp de o perioadă T a oscilaţiei propagate*:

$$\lambda = v \cdot T \tag{4}$$

Ecuaţia elongaţiei în punctul $M(x)$ va fi:

$$y(x,t) = \mathcal{A} \sin 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right) \tag{5}$$

Această ecuaţie reprezintă *ecuaţia undei plane sinusoidale* şi permite aflarea poziţiei punctului oscilant aflat la distanţa x de sursă la orice moment de timp t într-un mediu omogen şi izotrop.

Ecuaţia undei plane exprimă faptul că elongaţia y este funcţie dublu periodică de t şi x.

EXPERIMENT 1

Difuzorul alimentat la un generator de semnal sinusoidal de joasă frecvență și un microfon plasat la o anumită distanță de difuzor sunt conectate la cele două intrări ale unui osciloscop cu două spoturi sau unui osciloscop cu un spot și comutator electronic (fig. 1.92).

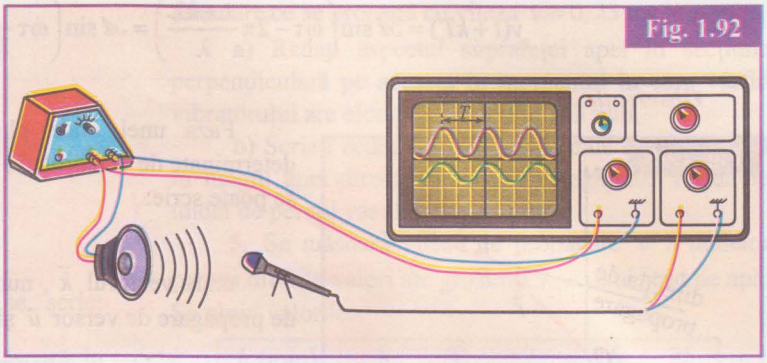


Fig. 1.92

Membrana difuzorului efectuează oscilații sinusoidale de aceeași frecvență cu cea a generatorului. Ea constituie sursa de oscilații. În punctul unde este plasat microfonul, unda sonoră face ca aerul să oscileze cu aceeași frecvență. Membrana microfonului convertește vibrațiile sonore sinusoidale în tensiune sinusoidală de aceeași frecvență. Pe ecranul osciloscopului apar cele două sinusoide de aceeași frecvență (perioadă).

Experimentul dovedește *periodicitatea temporală* a ecuației undei (5). Oricare ar fi poziția microfonului, oscilația înregistrată are aceeași perioadă (frecvență) ca a sursei (difuzorului).

Toate punctele de pe direcția de propagare a undei plane efectuează mișcări oscilatorii de aceeași perioadă și aceeași amplitudine cu cea a sursei dacă atenuarea (împrăștierea și absorbția energiei undei de către mediu) *este slabă.*

Pentru o poziție x_0 fixă a observatorului (receptorului), elongația este funcție periodică de timp, conform (5):

$$y(t) = \mathcal{A} \sin 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x_0}{\lambda}\right) \tag{6}$$

Dacă notăm cu $\varphi \equiv \frac{2\pi x_0}{\lambda}$, ecuația (6) devine:

$$y(t) = \mathcal{A} \sin(\omega t - \varphi) \tag{7}$$

Elongația este funcție periodică de timp, cu perioada T a sursei:

$$y(t+kT) = \mathcal{A} \sin\left[\frac{2\pi}{T}(t+kt) - \varphi\right] = \mathcal{A} \sin(\omega t + 2kt - \varphi) = \mathcal{A} \sin(\omega t - \varphi) = y(t) \tag{8}$$

EXPERIMENT 2

Microfonul și generatorul ce alimentează difuzorul se conectează la cele două intrări ale osciloscopului. Sensibilitățile celor două căi sunt aceleași. Deplasăm microfonul în lungul unei direcții de propagare (raze). Oricare ar fi poziția microfonului, pe ecran se observă două sinusoide de aceeași perioadă. Pentru o anumită poziție a microfonului, M_1, cele două sinusoide sunt în fază. Punctul M_1, aflat pe direcția de propagare a undei, reproduce oscilația sursei cu o amplitudine mai mică, din cauza amortizării (fig. 1.93.a). Îndepărtăm microfonul de difuzor pe aceeași direcție. Între oscilația sursei și oscilația captată de microfon apare un defazaj (fig. 1.93.b). Continuând deplasarea microfonului, defazajul crește. Pentru poziția M_2, cele două sinusoide sunt din nou în fază (fig. 1.93.c). Distanța $\overline{M_1M_2} = \lambda$. Continuând să îndepărtăm microfonul, vom regăsi periodic sinusoide în fază cu cea a sursei în puncte situate la distanțe egale cu λ, 2λ, 3λ, ..., față de punctul M_1.

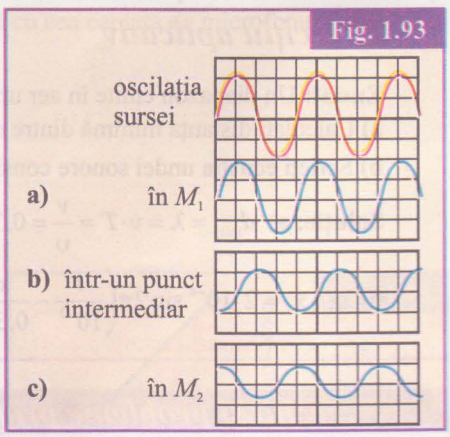


Fig. 1.93

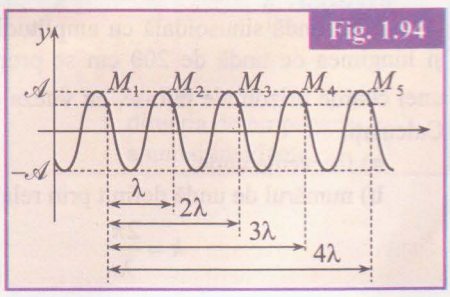


Fig. 1.94

Unda sonoră (în general, unda mecanică plană) prezintă o periodicitate spațială caracterizată de lungimea de undă λ. Lungimea de undă reprezintă distanța ce separă două puncte consecutive, aflate pe aceeași direcție de propagare, care oscilează în fază.

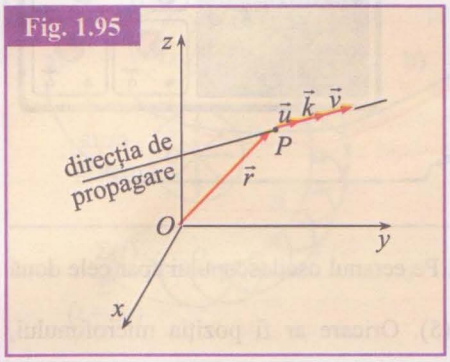
O fotografie instantanee a oscilațiilor particulelor unui mediu elastic omogen neabsorbant în care s-ar propaga o undă plană transversală ar avea aspectul unei sinusoide desfășurate în lungul direcției de propagare (fig. 1.94).

Punctele aflate la distanțe egale cu un multiplu întreg al lungimii de undă oscilează în fază. Într-adevăr, pentru un moment de timp τ fixat, ecuația undei plane (5) este funcție periodică de poziția x a punctului:

$$y(t+kT) = \mathcal{A}\sin\left(\omega\tau - 2\pi\frac{x+k\lambda}{\lambda}\right) = \mathcal{A}\sin\left(\omega\tau - 2\pi\frac{x}{\lambda}\right) = y(x), \text{ unde } k \in \mathbb{N} \quad (9)$$

Observație

Fig. 1.95



Faza unei unde plane ce se propagă în lungul unei direcții determinate de versorul $\vec{u}$, într-un punct de vector de poziție $\vec{r}$ (fig. 1.95) se poate scrie:

$$(\omega t - \vec{k}\cdot\vec{r}) \quad (10)$$

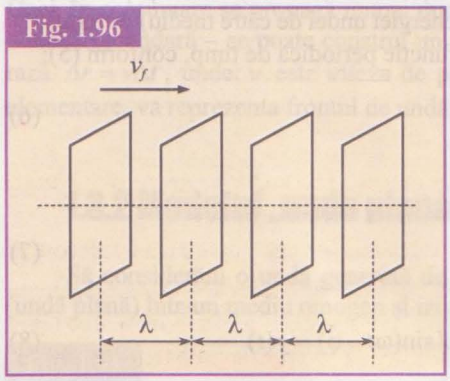
unde vectorul $\vec{k}$, numit *vector de undă*, este orientat după direcția de propagare de versor $\vec{u}$ și are expresia:

$$\vec{k} = \frac{2\pi}{\lambda}\cdot\vec{u} = \frac{\omega}{v}\vec{u} \quad (11)$$

Dacă direcția de propagare coincide cu direcția radială OP, atunci faza momentană se scrie:

$$\varphi = (\omega t - kr) \quad (12)$$

Fig. 1.96



Se numește viteză de fază v_f viteza cu care se deplasează suprafețele de undă de aceeași fază (fig. 1.96):

$$v_f = \frac{dr}{dt} = \frac{\omega}{k} \quad (13)$$

Viteza de fază este, în cele mai multe situații, egală cu viteza de propagare a undei. Dacă mărimile caracteristice mediului (tensiunea T, modulul de elasticitate E, densitatea liniară, μ, sau volumică, ρ) sunt constante, *viteza de fază a undelor nu depinde de frecvența* oscilațiilor. Mediul se numește *nedispersiv*.

Dacă viteza de fază (de propagare) depinde de frecvența undelor, mediul se numește *dispersiv*.

Exercițiu aplicativ

Enunț: Un diapazon emite în aer un sunet de frecvență $\upsilon = 1000$ Hz a cărui viteză de propagare este 340 ms^{-1}.

a) Calculați distanța minimă dintre două puncte aflate pe aceeași direcție de propagare care oscilează în fază.

b) Scrieți ecuația undei sonore considerată plană, știind că are amplitudinea constantă $2\cdot10^{-4}$ ms^{-1}.

Soluție: a) $d_{min} = \lambda = v\cdot T = \frac{v}{\upsilon} = 0{,}34$ m.

b) $u(t,x) = 2\cdot10^{-4}\sin 2\pi\left(\frac{t}{10^{-3}} - \frac{x}{0{,}34}\right)$ (m) sau $u(t,x) = 2\cdot10^{-4}\sin 2\pi\left(10^3 t - 2{,}94x\right)$ (m)

Exerciții și probleme propuse

1. O undă sinusoidală cu amplitudinea de 10 cm și lungimea de undă de 200 cm se propagă în lungul unei coarde orizontale întinse, cu viteza de 100 cm s^{-1}. Calculați:

a) frecvența undei;

b) numărul de undă definit prin relația

$$k = \frac{2\pi}{\lambda}$$

Scrieți:

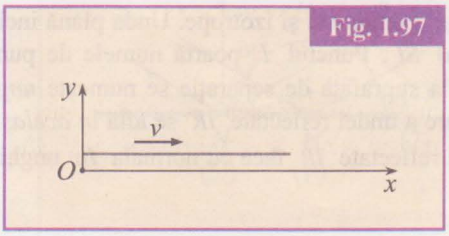
c) ecuația undei, știind că la momentul inițial extremitatea din stânga a corzii (fig. 1.97) se află în origine și se mișcă în sus;

d) ecuația de mișcare a unei particule a corzii aflate la 150 cm în dreapta originii;

e) ecuația vitezei de oscilație (transversală) a particulei corzii aflate la 150 cm în dreapta originii.

f) Calculați deplasarea și viteza transversală a particulei respective la $t = 3{,}25$ s.

Fig. 1.97



2. Ecuația unei unde longitudinale se scrie: $u(t,x) = 2\sin 2\pi\left(10^4 t - \frac{x}{0{,}3}\right)$, unde x se măsoară în m, u în cm, iar t în secunde. Determinați:

a) amplitudinea;

b) perioada;

c) lungimea de undă;

d) viteza de propagare a undei;

e) modulul lui Young pentru mediu, dacă densitatea acestuia este 11 300 kg/m^3.

3. O undă plană cu lungimea de undă 3 cm se propagă într-un mediu omogen și izotrop cu viteza $3 \cdot 10^3$ ms^{-1}. Calculați:

a) frecvența oscilațiilor și pulsația acestora;

b) numărul de undă k, definit prin relația $k = \frac{2\pi}{\lambda}$;

c) defazajul dintre două puncte situate pe una dintre direcțiile de propagare la distanța de 2,25 cm; 4,5 cm; 18 cm unul de celălalt.

4. Un vibrator punctiform lovește suprafața apei cu frecvența $\upsilon = 25$ Hz dând naștere unei unde circulare ce se propagă cu viteza $v = 0{,}25$ ms^{-1}.

a) Redați aspectul suprafeței apei în secțiune perpendiculară pe aceasta în momentul în care vârful vibratorului are elongația maximă de 3 mm.

b) Scrieți ecuația undei sinusoidale ce se propagă în lungul unei direcții radiale. Se neglijează reflexiile undei de pereții vasului.

5. Se măsoară viteza de propagare v a undelor pentru diferite valori ale grosimii h a unui strat de apă. Se obțin valorile:

h (mm)	1	4	9	16	25
v (ms^{-1})	0,10	0,20	0,30	0,40	0,50

Exprimați dependența vitezei de propagare de adâncimea apei. ($g = 10$ ms^{-1})

6. Un difuzor (S), considerat sursă sonoră punctiformă, este alimentat de un generator de joasă tensiune și frecvență reglabilă. Viteza de propagare a undelor sonore în aer are aceeași valoare în toate direcțiile, $v = 340$ ms^{-1}.

a) Într-un punct M situat la distanța $d = 2$ m de difuzorul S este plasat un microfon.

Precizați numărul punctelor aparținând segmentului $\overline{SM}$ care oscilează în fază cu oscilația captată de microfon, dacă frecvența generatorului a fost fixată la 450 Hz.

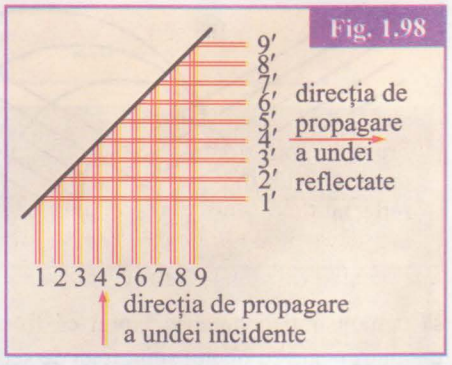
b) Se modifică frecvența la valoarea de 550 Hz. La ce distanță minimă de M, pe segmentul SM, trebuie plasat un alt microfon pentru a detecta o vibrație sonoră în fază cu cea captată de microfonul din M?

1.3.3 Reflexia și refracția undelor mecanice

Experiment

Folosiți o cuvă orizontală în care se află un strat de apă de 1-2 cm grosime. Cu ajutorul unei lame orizontale atașate vibratorului, produceți unde plane pe suprafața apei. Plasați o placă sub un anumit unghi față de direcția de propagare a undei. Puteți observa întoarcerea undei după întâlnirea obstacolului, urmărind modificarea direcției sale de propagare și a fronturilor sale de undă (fig. 1.98).

Fig. 1.98



Fenomenul de întoarcere a undei incidente în mediul în care se propagă, în momentul în care atinge suprafața de separație a altui mediu, se numește *reflexie*. În cazul experimentului descris, aceasta este suprafața plană a obstacolului rigid.

Fronturile undelor incidente (1, 2, 3, 4, 5...) și cele ale undelor reflectate (1′, 2′, 3′, 4′, 5′, ...) din fig. 1.98 se intersectează sub un unghi ce depinde de înclinarea obstacolului plan față de direcția de propagare a undei incidente.

Reflexia se face cu schimbarea direcției și sensului de propagare.

După reflexie, unda plană își păstrează caracterul plan.

În mod asemănător, reflexia unei unde circulare de un obstacol fix conduce la obținerea unei unde reflectate, de asemenea circulară (fig. 1.99).

Denumiri. Fie AB suprafața plană de separare între mediile 1 și 2 omogene și izotrope. Unda plană incidentă emisă de o sursă aflată în mediul 1 are direcția de propagare (raza) SI. Punctul I poartă numele de punct de incidență (fig. 1.100). Unghiul format de raza incidentă și normala la suprafața de separație se numește *unghi de incidență* și se notează prin i. Experiența arată că direcția de propagare a undei reflectate IR se află *în același plan* cu raza incidentă și cu normala în punctul de incidență. Direcția razei reflectate IR face cu normala In unghiul i', numit *unghi de reflexie*.

Fig. 1.99

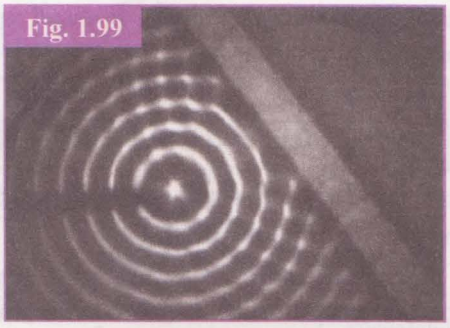
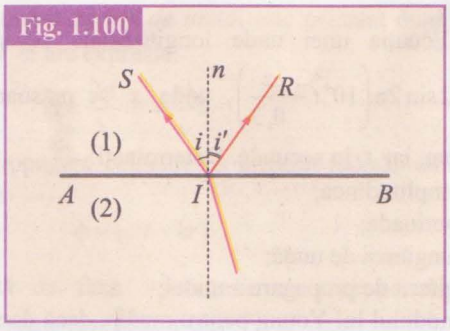


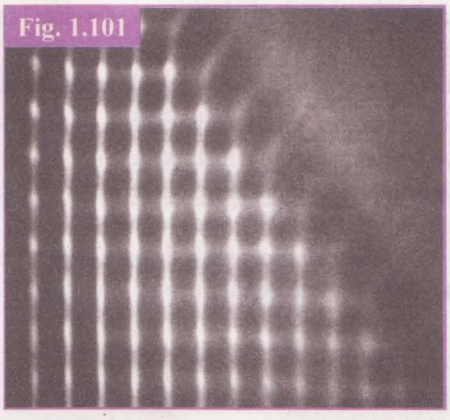
Fig. 1.100



Măsurarea unghiurilor de *incidență* și de *reflexie* arată că acestea *sunt egale* (*legea reflexiei*):

$$i' = i \qquad (1)$$

Fig. 1.101

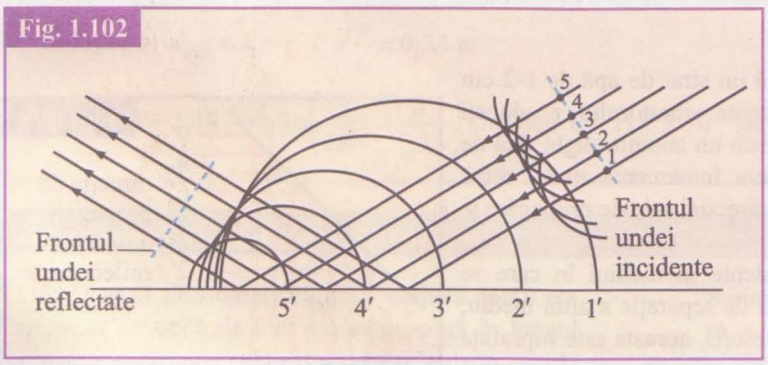


Egalitatea celor două unghiuri poate fi dovedită experimental prin măsurarea unghiurilor fronturilor de undă plane cu suprafața de separație înainte și după reflexie (fig. 1.101).

Legea reflexiei poate fi explicată pe baza principiului lui Huygens. Să presupunem că pe suprafața de separație plană (obstacol plan) cade o undă plană. Fiecare din punctele 1, 2, 3, ... ce alcătuiesc frontul de undă plan al undei incidente oscilează în fază și constituie surse secundare de unde. Înfășurătoarea fronturilor de undă secundare generate de aceste puncte este o undă plană (fig. 1.102).

Întâlnind în drumul ei suprafața de separație (obstacolul) plană, care face unghiul i cu frontul de undă, unda este reflectată. Să presupunem că la momentul $t_0 = 0$, unda din punctul 1 a atins suprafața (obstacolul) în punctul $1'$. Acest punct devine o nouă sursă de oscilații și începe să emită o undă secundară. La momentul t_1, unda de la punctul 2 atinge suprafața în punctul $2'$ și devine și ea o sursă secundară de unde. În sfârșit, la momentul T ajunge până la suprafață unda de la punctul 5. Undele secundare cu centrele în punctele $1'$, $2'$, $3'$, $4'$ și $5'$ se propagă în timpul care a trecut de la t_0 până la T cu aceeași viteză, pe distanțe respectiv din ce în ce mai scurte, astfel încât înfășurătoarea fronturilor lor de undă secundare constituie frontul plan al undei reflectate. Figura 1.103 vă poate ajuta să demonstrați geometric faptul că frontul de undă reflectat (NP') și cel incident (MP) al razelor extreme fac unghiuri egale cu planul suprafeței de separație.

Fig. 1.102



$$\sphericalangle PMN = i = \sphericalangle P'NM = i'$$

În mod analog, pe baza principiului lui Huygens puteți construi unda reflectată în cazul când pe un obstacol plan cade o undă sferică (fig. 1.104).

Fig. 1.103

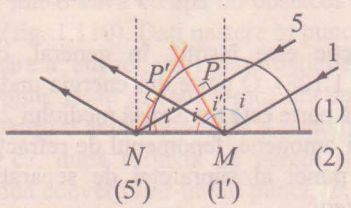
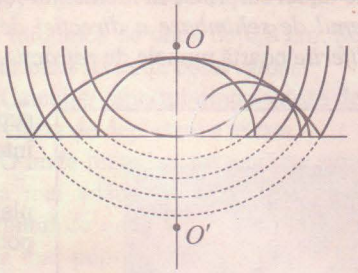


Fig. 1.104



Observație importantă

În funcție de raportul densităților mediilor 1 și 2, reflexia poate avea loc în două moduri. Astfel, dacă densitatea mediului reflectant 2 este mai mare decât a celui în care se propagă unda incidentă 1, reflexia are loc cu schimbarea sensului elongației.

Fenomenul poate fi observat (stroboscopic) la reflexia unei unde transversale printr-o coardă întinsă fixată la un capăt (fig. 1.105). Când unda ajunge la capătul fix, ea exercită o forță asupra suportului rigid.

În virtutea legii a III-a a lui Newton, suportul exercită o forță egală și de sens opus asupra corzii, generând o undă ce se va propaga în sens opus, inversându-și totodată și sensul deplasării transversale. Reflexia pe suprafața de separație cu un mediu mai dens are loc cu schimbarea sensului elongației, unda reflectată având fază opusă față de cea a undei incidente. Dacă faza undei incidente este în punctul de fixare N al corzii:

$$\varphi_i = 2\pi\left(\frac{t}{T}-\frac{x}{\lambda}\right) \tag{2}$$

faza undei reflectate va fi în același punct:

$$\varphi_r = 2\pi\left(\frac{t}{T}-\frac{x}{\lambda}\right)+\pi = 2\pi\left(\frac{t}{T}-\frac{x-\frac{\lambda}{2}}{\lambda}\right) \tag{3}$$

Prin urmare, o astfel de reflexie se produce cu **pierdere de** $\lambda/2$.

Reflexia pe un mediu mai puțin dens nu produce schimbarea sensului elongației și nici pierderea de $\lambda/2$. Spre exemplu, la reflexia undei transversale într-o coardă elastică pe un capăt ce se poate mișca liber transversal (fig. 1.106), unda reflectată este în fază cu cea incidentă.

Fig. 1.105

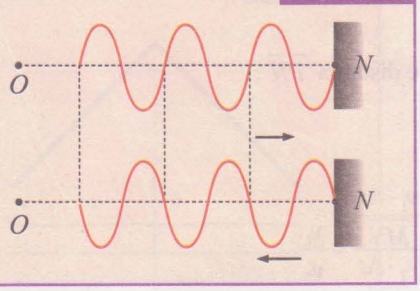
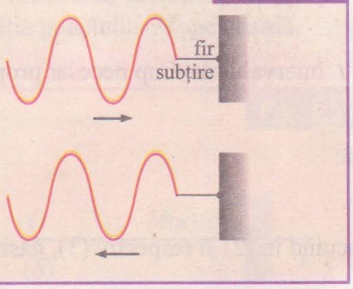


Fig. 1.106

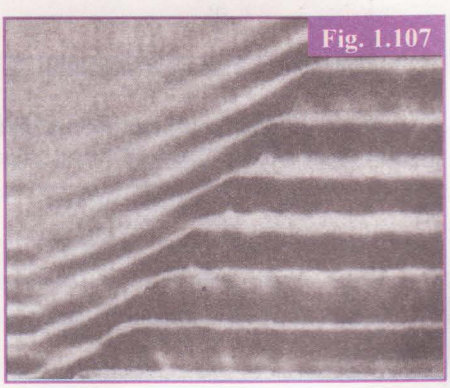


Refracția undelor

Ați constatat că viteza de propagare a undelor depinde de proprietățile elastice ale mediului prin care se propagă. Experimental se arată că dacă unda atinge suprafața de separație dintre două medii elastice în care vitezele de propagare sunt diferite, direcția sa de propagare se modifică.

Spre exemplu, trecerea undelor produse de o lamă vibrantă peste frontiera ce separă două compartimente cu adâncimi diferite ale apei se produce cu modificarea direcției de propagare (fig. 1.107). Se știe că viteza de propagare este mai mică în apa puțin adâncă decât în apa adâncă și aceeași relație se menține și între lungimile de undă. Puteți observa

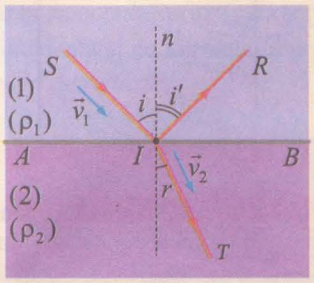
Fig. 1.107



modificarea corespunzătoare a distanței dintre „crestele" paralele ale valurilor din cele două compartimente, reprezentând fronturile undei surprinse în momentul fotografierii.

Fenomenul de schimbare a direcției de propagare a unei unde la traversarea suprafeței de separare dintre două medii diferite poartă numele de *refracție*.

Fig. 1.108



Fenomenul de refracție este însoțit, în general, de reflexia pe suprafața de separație (fig. 1.108). O parte din energia undei incidente se întoarce în mediul 1 și o altă parte este transmisă mediului 2 prin refracție.

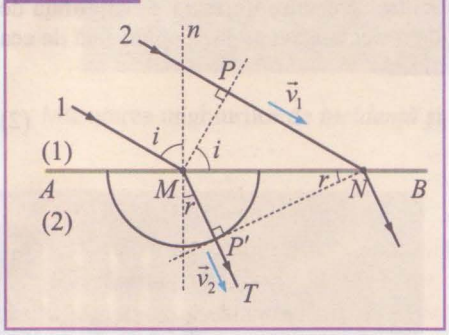
În cazul a două medii omogene, fenomenul de refracție a unei unde plane sinusoidale într-un punct al suprafeței de separație se produce potrivit următoarelor *două legi*:

1. Raza incidentă (*SI*), normala la suprafața de separație în punctul de incidență (*I*) și raza refractată (transmisă, *IT*) se află *în același plan*;

2. *raportul* dintre *sinusul* unghiului de incidență (*i*) și al celui de refracție (*r*) este *constant* și egal cu raportul vitezelor de propagare a undei în cele două medii:

$$\frac{\sin i}{\sin r} = \frac{v_1}{v_2} = \text{const.} \qquad (1)$$

Fig. 1.109



Legea a doua a refracției, observată experimental, poate fi explicată utilizând principiul lui Huygens. Suprafața AB separă două medii omogene de densități diferite $\rho_1 < \rho_2$, în care vitezele de propagare a undei plane sunt respectiv, v_1 și v_2 astfel încât $v_1 > v_2$. Vom considera razele incidente paralele 1 și 2 ce delimitează fasciculul incident. Conform fig. 1.109, când raza 1 atinge în M suprafața de separație, frontul de undă este MP, perpendicular pe direcția de propagare a undei incidente.

În timp ce unda 2 parcurge distanța $\overline{PN}$, unda secundară produsă de punctul M se propagă în mediul al doilea cu o viteză mai mică. Unda refractată va ajunge în același interval de timp pe un front de undă sferic cu raza $\overline{MP'}$ mai mică decât distanța $\overline{PN}$. Pentru a afla direcția razei refractate, ducem din N tangenta la acest front de undă, de rază $\overline{MP'}$.

Din triunghiurile dreptunghice ΔMPN și $\Delta MP'N$ rezultă:

$$\sin i = \frac{\overline{NP}}{\overline{MN}} \qquad (2)$$

și

$$\sin r = \frac{\overline{MP}}{\overline{MN}} \qquad (3)$$

Fie t intervalul de timp necesar propagării undei incidente pe distanța $\overline{PN}$.

Avem:

$$\overline{PN} = v_1 \cdot \Delta t \qquad (4)$$

și totodată:

$$\overline{MP'} = v_2 \cdot \Delta t \qquad (5)$$

Înlocuind în (2) și respectiv (3), găsim apoi raportul: $\dfrac{\sin i}{\sin r} = \dfrac{\dfrac{v_1 \cdot \Delta t}{\overline{MN}}}{\dfrac{v_2 \cdot \Delta t}{\overline{MN}}} = \dfrac{v_1}{v_2}$

Pentru orice valoare a unghiului de incidență: $\dfrac{\sin i}{\sin r} = \dfrac{v_1}{v_2} = \text{const.}$

Raportul, constant pentru două medii date, poartă numele de *indice de refracție* (n) al mediului 2 în raport cu mediul 1:

$$n_{21} = \frac{v_1}{v_2} \qquad (6)$$

Observație

Legea refracției arată și experiența confirmă că unghiul de refracție este mai mic decât cel de incidență ($r < i$.) dacă $v_2 > v_1$.

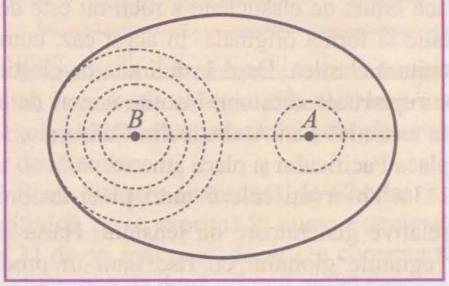
Întrebări, exerciții și probleme propuse

1. Plasați într-o cuvă cu apă un obstacol de forma unei elipse (fig. 1.110). Dați naștere în punctul A, situat pe axa mare a elipsei, unei perturbații de scurtă durată (de exemplu, lăsați să cadă o picătură de apă în acest punct). Pentru o anumită poziție a punctului A, puteți observa că, după reflexia pe pereții barierei, fronturile de undă converg într-un alt punct, B, situat de asemenea pe axa mare a elipsei.

a) Corelați cele observate cu geometria elipsei. Ce reprezintă punctele A și B pentru elipsă?

b) Ce se întâmplă dacă perturbația este generată în punctul B?

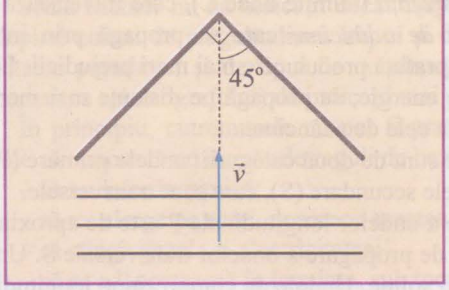
Fig. 1.110



2. O undă liniară (fig..111) se reflectă de o barieră în unghi drept sub unghiul de 45°.

Desenați fronturile de undă ce pot fi observate după reflexia cu pereții barierei.

Fig. 1.111



3. Într-un punct al unei cuve cu apă se produc unde circulare lăsând să cadă picături dintr-o pipetă la intervale regulate de timp. Luminând suprafața apei cu un stroboscop (pentru a observa o imagine statică) măsurăm diferența dintre raza primului cerc și a celui de-al șaselea cerc, găsind-o de 10 cm.

a) Calculați lungimea de undă.

b) Experimentul se repetă deplasând sursa (pipeta) cu viteză constantă de la un capăt la altul al cuvei. Un observator plasat la una din extremitățile cuvei măsoară lungimea de undă de 0,8 cm. Se apropie sau se îndepărtează sursa de observator?

c) Calculați raportul dintre viteza de propagare a undei și viteza de deplasare a sursei.

4. O undă liniară se propagă pe suprafața apei în secțiunea mai adâncă a unei cuve cu viteza de 34 cm/s. Frontul de undă întâlnește linia de separație cu secțiunea mai puțin adâncă a cuvei sub un unghi de 60°. În această regiune, unda se propagă cu viteza de 24 cm/s.

a) Calculați unghiul de refracție și indicele relativ de refracție al celui de al doilea compartiment față de primul.

b) Prin modificarea frecvenței sursei, viteza de propagare a undelor superficiale se modifică. Spunem că mediul de propagare este *dispersiv*. Descrieți două modalități de evidențiere a fenomenului de dispersie.

5. Într-o coardă elastică cu densitatea liniară $\mu = 20$ g/m, tensiunea este $T = 10$ kN. Coarda este fixată de un obstacol rigid aflat la distanța $L = 1{,}5$ m de sursa de oscilații transversale (fig. 1.112).

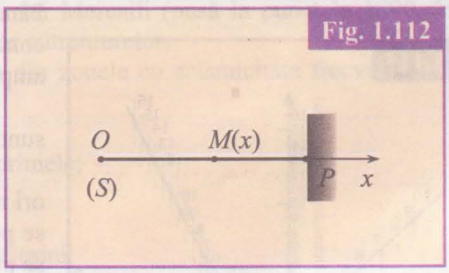
Cunoscând amplitudinea oscilațiilor imprimate $\mathcal{A} = 3$ mm și frecvența sursei $\upsilon = 50$ Hz, scrieți:

a) ecuația undei sinusoidale incidente la momentul t într-un punct al corzii, M, de abscisă x; drept origine a timpului se consideră momentul când punctul O al corzii se află pe direcția orizontală și începe să se miște vertical în sus;

b) ecuația undei reflectate de obstacol în același punct $M(x)$ al corzii, la momentul t.

c) Exprimați defazajul dintre cele două unde, incidentă și reflectată; arătați că acesta nu depinde decât de poziția punctului M pe coardă.

Fig. 1.112

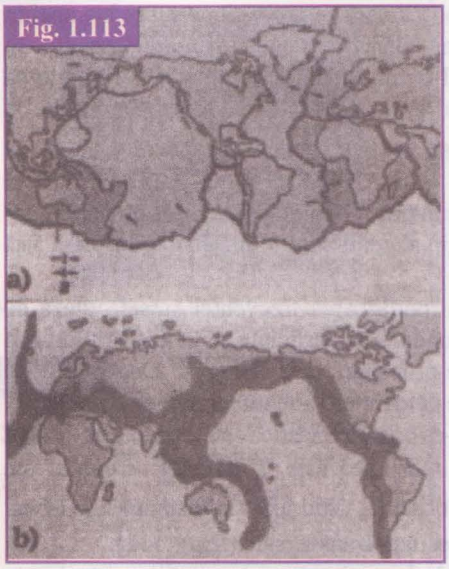


6. Să se afle indicele de reracție al cuprului în raport cu aluminiul știind că, pentru undele longitudinale, $E_{Al} = 7{,}05 \cdot 10^{10}$ Nm^{-2} și $E_{Cu} = 13 \cdot 10^{10}$ Nm^{-2}, densitățile fiind $\rho_{Al} = 2700$ kgm^{-3} și $\rho_{Cu} = 8900$ kgm^{-3}. Dacă unghiul de incidență la suprafața dintre medii este $i = 30^\circ$, aflați unghiul de refracție.

1.3.4 Unde seismice

Un cutremur de pământ se manifestă, așa cum știți cu toții, printr-o mișcare de vibrație și uneori printr-o mișcare violentă resimțită la suprafața pământului. Undele care se propagă în urma acestei perturbații locale străbat interiorul planetei, oferind cea mai utilă metodă de studiu a structurii sale geologice. Seismologia este ramura fizicii Pământului care studiază undele generate de mișcările din straturile geologice profunde (deplasări orizontale sau verticale rapide). Cutremurele sunt unde de șoc ce traversează interiorul Pământului de câteva milioane de ori pe an, dar marea lor majoritate sunt foarte slabe și nu pot fi detectate decât cu aparatură de mare finețe. Există și cutremure de mare intensitate, devastatoare pentru regiuni întinse.

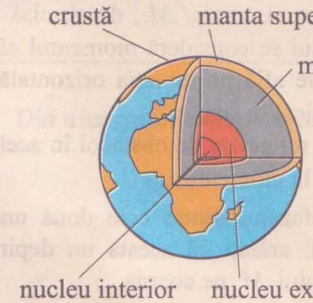
Fig. 1.113



Cauza cutremurelor sunt mișcările plăcilor tectonice, care crează tensiuni la nivelul contactului dintre ele. Rocile posedă proprietăți elastice și energia se acumulează în deformări elastice ale litosferei. Dacă forțele ce determină aceste deformări sunt suficient de mari pentru a depăși forțele de frecare din lungul limitelor plăcilor, atunci pereții ce vin în contact se deplasează brusc și energia elastică acumulată în roci este eliberată, provocând un cutremur. Dacă limita de elasticitate a rocii nu este depășită, după mișcare ea revine elastic la forma originală. În acest caz, cutremurul este resimțit doar ca o zvâcnitură elastică. Dacă însă limita de elasticitate a rocilor este depașită, au loc rupturi ale acestora, însoțite uneori de apariția unor falii (de exemplu, falia tectonică San Andreas din California, formată pe linia de separație dintre placa Pacificului și placa americană).

Pe harta din fig. 1.113.a observați cele 6 mari plăci tectonice ale globului și mișcările lor relative generatoare de tensiuni. Harta din fig. 1.113.b prezintă în roșu regiunile globului cu risc înalt în producerea cutremurelor de mare intensitate. De notat că „inelul Pacificului" își datorează seismicitatea ridicată activității vulcanice.

Fig. 1.114

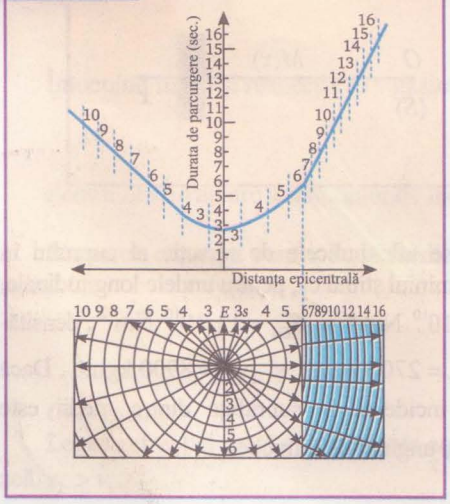


Punctul sau regiunea eliberării inițiale de energie într-un cutremur se numește *focar*. Marea majoritate a cutremurelor au loc în crusta sau în mantaua superioară (fig. 1.114), astfel încât focarul se află la adâncimi de câteva zeci de km până la sute de km. Geologii numesc punctul de pe suprafața Pământului aflat chiar deasupra focarului *epicentru*.

Energia eliberată în focarul cutremurului se propagă prin unde seismice. Există în general două tipuri de unde seismice produse de vibrația cutremurului: *unde de suprafață* (numite unde L), care traversează suprafața Pământului, și *unde de adâncime* care se propagă prin interiorul Pământului. Undele de suprafață produc cele mai mari prejudicii. Ele au o concentrație mai mare de energie, se propagă pe distanțe mai mari și au amplitudini mai mari decât cele de adâncime.

Undele de adâncime sunt de două categorii: undele primare (P), care sunt longitudinale, și undele secundare (S), care sunt transversale.

Fig. 1.115



Viteza de propagare a undelor longitudinale P este de aproximativ 2 ori mai mare decât viteza de propagare a undelor transversale S. Undele S se pot propaga numai prin solide. Undele de compresiune longitudinale P se propagă prin orice mediu, solid, lichid sau gaz.

În figura 1.115 este reprezentat schematic procesul de propagare a undelor sferice care pornesc din focarul notat cu O. Razele seismice ajung la suprafața Pământului în momente diferite. Distanța de la epicentrul E până la locul de observație poartă numele de distanță *epicentrală*. Când undele întâlnesc un mediu în care viteza de propagare devine mai mică, se vor refracta. Viteza lor de propagare depinde de densitatea materialului scoarței terestre, care în general crește cu adâncimea. Undele se refractă când întâlnesc suprafața de separație dintre două medii. Refracția undelor seismice și faptul că undele S nu pot traversa mediile lichide au permis geofizicienilor să fundamenteze modelul actual de structură internă a

Pământului (fig. 1.116). Existența așa-numitelor „zone de umbră" ale undelor S și P i-au determinat să presupună că Pământul are un nucleu interior solid înconjurat de un nucleu lichid foarte vâscos.

Undele seismice sunt înregistrate cu ajutorul unui instrument numit *seismograf*, al cărui principiu este ilustrat în fig. 1.117.

Seismograma înregistrată dă indicații asupra intervalelor de timp după care sosesc diferitele tipuri de unde directe sau reflectate, ca și asupra energiei transportate de acestea (prin analizarea amplitudinii lor).

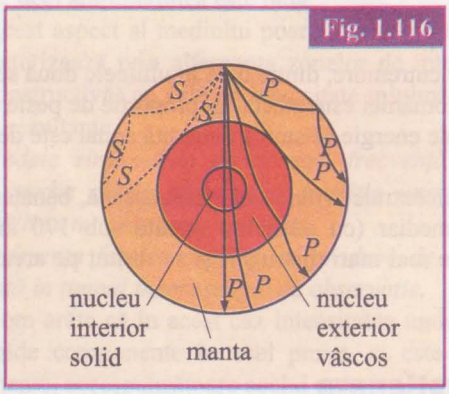


Fig. 1.116

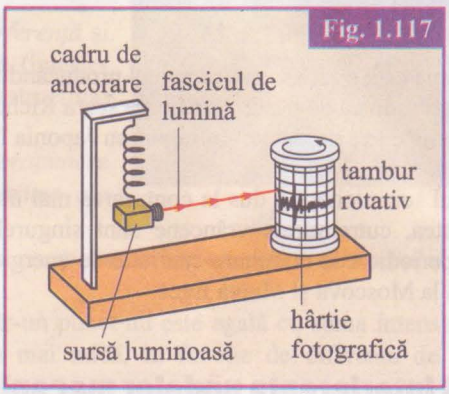


Fig. 1.117

Intensitatea cutremurelor este reprezentată în diferite scale. Cele mai des utilizate sunt: *scala Richter*, care exprimă logaritmic energia eliberată la o anumită distanță epicentrală standard, și *scala Mercalli* modificată, care descrie intensitatea cutremurului prin observarea efectelor sale în epicentru. În tabelul de mai jos aveți o comparație a celor două scale.

Scala Richter (introdusă de Charles Richter în 1935 la Institutul de Tehnologie din California) este o scală logaritmică, ce se exprimă în numere zecimale cuprinse între 1 și 9. Fiecare număr întreg corespunde unei energii de circa 31 de ori mai mare decât cea corespunzătoare numărului întreg precedent. Astfel, un cutremur cu magnitudinea 8 nu eliberează de două ori mai multă energie decât unul cu magnitudinea 4, ci de un milion de ori mai multă!

Magnitudinea pe scala Richter	Intensitatea pe scala Mercalli modificată	Descriere
1-2	I	detectat numai de instrumente
3-4	II-III	este resimțit slab
4-5	IV-V	se simte; obiectele vibrează ușor
6-7	VI-VIII	produce panică; distrugeri moderate
7-8	IX-X	cutremur major; distrugeri majore
8+	XI-XII	cutremur catastrofal

Scala Richter nu dă indicații decât asupra potențialului distructiv al cutremurelor. Pagubele produse de acestea nu depind numai de magnitudinea lor, ci și de pozițiile focarului și epicentrului, de specificul geologic al zonei, de densitatea populației și de tipul de construcții. Scala modificată a lui Mercalli (pusă la punct în 1890, înainte de descoperirea seismografului) dă indicații mai precise asupra efectelor cutremurelor.

În principiu, cutremurele nu pot fi prevăzute. Dar populația din zonele cu seismicitate frecventă sau intensă trebuie să cunoască un număr de reguli de bază în caz de cutremur:

– să nu intre în panică;
– să nu alerge pe scări, deoarece acestea se prăbușesc printre primele;
– să stingă gazele și electricitatea;
– să se adăpostească în locuințe, sub tocul ușii;
– pe stradă, să nu se adăpostească sub balcoane, coloane sau streșini;
– să învețe să dea primul ajutor în caz de rănire sau arsură;
– să cheme telefonic ambulanța în caz de urgență.

Temă: În baza celor expuse și a celor studiate de voi la geografie, alcătuiți un eseu despre „Seismicitatea regiunii Vrancea", precizând cauzele producerii cutremurelor, cutremurele majore survenite și efectele acestora, periodicitatea lor.

Distribuția geografică a seismelor

Cutremurele de mare magnitudine urmează limitele plăcilor tectonice, observându-se existența a două zone înguste și alungite care concentrează 99% din activitatea seismică a planetei: „*cercul circumpacific*". Această zonă corespunde marilor falii inverse în care continentele alunecă deasupra domeniului oceanic, ducând la închiderea Pacificului.

Cea de-a doua zonă corespunde *arcului munților terțiari*; acest relief înalt este consecința compresiunii rezultate din închiderea completă a mării Tethys. În cadrul acestor zone de orogen, seismele locale se datorează frecvent unor decroșări orizontale de blocuri în lungul unor falii verticale.

Celor două regiuni li se mai adaugă traseele imensului lanț submarin, secundare din punct de vedere al energiilor desfășurate, dar importante prin semnificația lor tectonică, aici născându-se o nouă scoarță oceanică, ce duce la împingerea, de-o parte și de alta, a continentelor.

Seismicitatea în România

România este o țară seismică, anual producându-se cca. 500 de cutremure, dintre care în ultimele două secole 50 au avut magnitudinea de peste 5 grade pe scara Richter. Teritoriul României este afectat în proporție de peste 50% de seisme puternice sau moderate. În raport cu Japonia însă, cantitatea de energie seismică eliberată anual este de 400 de ori mai mică.

Studiul seismicității a dus la conturarea mai multor regiuni epicentrale: vrânceană, făgărășeană, bănățeană etc. Dintre acestea, cutremurele vrâncene sunt singurele de tip intermediar (cu adâncimi situate sub 170 km). Ele eliberează periodic cea mai mare cantitate de energie, provoacă cele mai mari distrugeri și se resimt pe areale ce se extind până la Moscova și Marea Egee.

1.3.5 Interferența undelor mecanice. Unde staționare

Principiul superpoziției undelor

Într-un mediu se pot propaga în același timp două sau mai multe unde care provin de la surse diferite. Experiența arată că undele *acționează independent una de alta*, ceea ce înseamnă că elongația unei particule a mediului, la un moment dat, este rezultanta elongațiilor pe care le-ar produce fiecare undă acționând individual. Acest proces de compunere (vectorială) a elongațiilor individuale se numește *suprapunere* (superpoziție). Astfel, într-un sunet putem identifica notele emise de fiecare instrument dintr-o orchestră, deși unda sonoră percepută de urechea noastră de la întreaga orchestră este foarte complexă.

Principiul suprapunerii (superpoziției) face posibilă analiza unei mișcări oscilatorii complicate ca o combinație de mișcări sinusoidale simple.

Matematicianul francez J. Fourier (1768 – 1830) a arătat că orice mișcare periodică a unei particule poate fi reprezentată ca o suprapunere de mișcări armonice simple. Astfel, dacă $y(t)$ reprezintă mișcarea unei surse de oscilații cu perioada T, ea poate fi scrisă:

$$y(t) = \mathcal{A}_0 + \mathcal{A}_1 \sin \omega t + \mathcal{A}_2 \sin 2\omega t + \mathcal{A}_3 \sin 3\omega t + \ldots + \\ + \mathcal{B}_1 \cos \omega t + \mathcal{B}_2 \cos 2\omega t + \mathcal{B}_3 \cos 3\omega t + \ldots \quad (1)$$

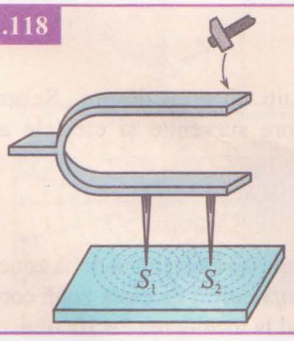
unde $$\omega = \frac{2\pi}{T} \quad (2)$$

Această serie se numește serie Fourier; coeficienții $\mathcal{A}_i$ și $\mathcal{B}_i$ sunt bine determinați pentru orice mișcare periodică particulară.

Fourier a generalizat rezultatul, arătând că orice mișcare a unei surse de unde (perturbație locală) poate fi reprezentată cu ajutorul mișcărilor armonice simple. În consecință, undele generate de o perturbație oarecare pot fi analizate ca fiind combinații de unde sinusoidale (plane).

În capitolul „Elemente de acustică" vom aplica analiza Fourier undei sonore complexe emise de un instrument muzical.

Fig. 1.118



Unde coerente

În cazul particular al suprapunerii într-un punct al mediului elastic omogen a două unde sinusoidale de aceeași frecvență apare un fenomen foarte interesant numit *interferență*.

EXPERIMENT

Se sudează, de tija unui diapazon la distanța de 2-3 cm unul de altul, două ace identice, ca în fig. 1.118. Vârfurile acestora ating ușor suprafața apei dintr-o cuvă transparentă.

Excitând diapazonul cu un ciocănel, vârfurile S_1 şi S_2 devin surse de unde de aceeaşi frecvenţă (cea a diapazonului care vibrează armonic, emiţând un sunet pur).

Observaţi aspectul suprafeţei libere a apei. Apar regiuni distincte unde amplitudinea oscilaţiilor este maximă („crestele" sunt bine reliefate în lungul anumitor direcţii) şi alte regiuni în care suprafaţa apei nu este vălurită, deci amplitudinea este nulă.

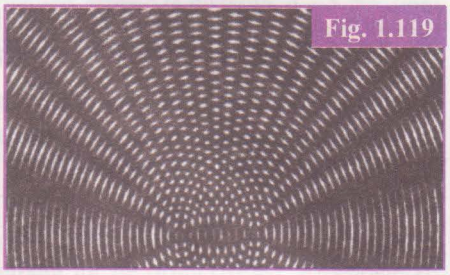


Fig. 1.119

Acest aspect al mediului poartă numele de *figură de interferenţă* şi se caracterizează prin alternanţa zonelor de intensitate maximă (interferenţa constructivă) cu cele de intensitate minimă (interferenţa distructivă) a undei rezultante.

Undele sinusoidale de aceeaşi frecvenţă care prin suprapunere într-un mediu elastic determină apariţia unor minime şi maxime ale intensităţii se numesc unde ***coerente****.*

Diferenţa fazelor oscilaţiilor produse de cele două unde componente într-un punct al mediului se menţine constantă în timpul macroscopic de observaţie.

Vom arăta că în acest caz intensitatea undei rezultante într-un punct nu este egală cu suma intensităţilor celor două unde componente în acel punct, ci este mai mare sau mai mică, în funcţie de diferenţa de fază dintre componente, corespunzătoare acelui punct.

1.3.5.1 Interferenţa undelor sinusoidale

Fie sursele coerente S_1 şi S_2. Undele considerate sinusoidale ce se propagă de la acestea în direcţia unui punct P al mediului considerat omogen şi izotrop şi care se suprapun aici, se scriu:

$$y_1 = \mathcal{A}_1 \sin 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{r_1}{\lambda}\right) \tag{3}$$

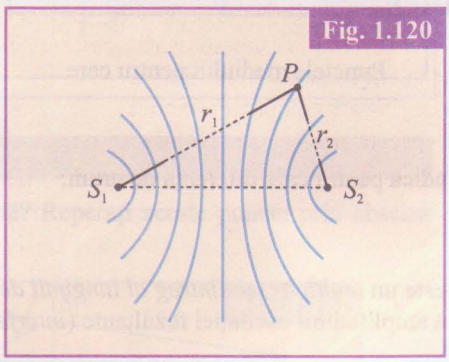


Fig. 1.120

respectiv:

$$y_2 = \mathcal{A}_2 \sin 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{r_2}{\lambda}\right) \tag{4}$$

Am considerat că oscilaţiile celor două surse sunt în fază ($\varphi_{01} = \varphi_{02}$), dar amplitudinile lor pot fi, în general, diferite ($\mathcal{A}_1 \neq \mathcal{A}_2$).

Elongaţia rezultantă în P va fi, în conformitate cu principiul superpoziţiei:

$$y_P = y_1 + y_2 \tag{5}$$

Compunerea fazorială (vectorială) a celor două oscilaţii este ilustrată în fig. 1.121, unde:

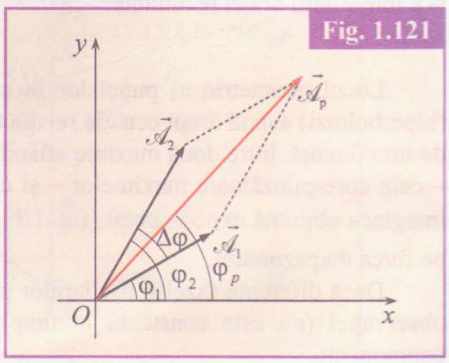


Fig. 1.121

$$\varphi_1 = \omega t - \frac{2\pi r_1}{\lambda} \text{ şi } \varphi_2 = \omega t - \frac{2\pi r_2}{\lambda} \tag{6}$$

reprezintă fazele celor două oscilaţii la momentul t.

Unda rezultantă va fi o undă sinusoidală de amplitudine $\mathcal{A}_P$ şi fază φ_P, ce pot fi determinate geometric.

Obţinem pentru pătratul amplitudinii undei rezultante:

$$\mathcal{A}_P^2 = \mathcal{A}_1^2 + \mathcal{A}_2^2 + 2\mathcal{A}_1\mathcal{A}_2 \cos\Delta\varphi \tag{7}$$

unde

$$\Delta\varphi = \varphi_2 - \varphi_1 = \frac{2\pi}{\lambda}(r_1 - r_2) \tag{8}$$

reprezintă defazajul apărut între unde în punctul P datorită diferenţei de drum la cele două surse:

$$\Delta r = r_1 - r_2 \tag{9}$$

Intensitatea undei rezultate prin suprapunere în punctul P depinde de pătratul amplitudinii oscilaţiei imprimate acestui punct.

Tragem concluzia că intensitatea undei rezultante:

$$\mathcal{I}_P = \mathcal{I}_1 + \mathcal{I}_2 + 2\sqrt{\mathcal{I}_1 \mathcal{I}_2}\cos 2\pi\frac{\Delta r}{\lambda} \tag{10}$$

depinde de diferența de drum a punctului la cele două surse.

Punctele pentru care această diferență de drum satisface relația:

$$\cos 2\pi\frac{\Delta r}{\lambda} = 1 \tag{11}$$

vor avea amplitudinea și deci intensitatea maximă:

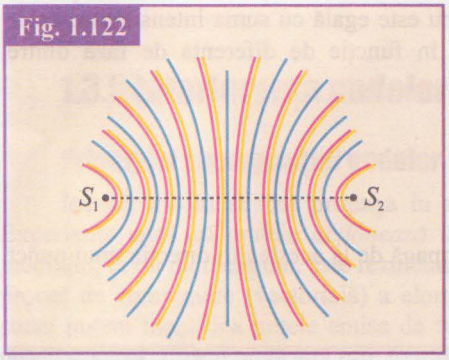
$$\mathcal{A}_{P\max} = \mathcal{A}_1 + \mathcal{A}_2 \tag{12}$$

$$\mathcal{I}_{P\max} = \mathcal{I}_1 + \mathcal{I}_2 + 2\sqrt{\mathcal{I}_1 \mathcal{I}_2} \tag{13}$$

Pentru aceste puncte, amplitudinile individuale se adună, interferența fiind numită constructivă. Locul geometric al acestor puncte are ecuația:

$$\Delta r = k\lambda = 2k\frac{\lambda}{2} = 1, \qquad k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots \tag{14}$$

Fig. 1.122



și reprezintă familia curbelor (suprafețelor) trasate cu albastru în planul surselor punctiforme (fig. 1.122). Din punct de vedere geometric, acestea sunt hiperbole pentru undele superficiale (hiperboloizi de rotație pentru un mediu omogen tridimensional în care oscilează două surse punctiforme coerente). Pentru $k = 0$ se obține maximul central de interferență constituit de punctele aflate pe mediatoarea segmentului S_1S_2 (respectiv în planul median).

În concluzie, *punctele mediului pentru care diferența de drum la cele două surse coerente este un multiplu întreg al lungimii de undă prezintă maxime de interferență, caracterizate printr-o valoare maximă a amplitudinii de oscilație și a intensității undei rezultante.*

Punctele mediului pentru care

$$\cos 2\pi\frac{\Delta r}{\lambda} = -1 \tag{15}$$

adică pentru care diferența de drum:

$$\Delta r = \left(k + \frac{1}{2}\right)\lambda = (2k+1)\frac{\lambda}{2} \tag{16}$$

este un *multiplu semiîntreg al lungimii de undă*, prezintă *minime de interferență* caracterizate printr-o valoare minimă a amplitudinii oscilației rezultante (*interferență distructivă*):

$$\mathcal{A}_{P\min} = \left|\mathcal{A}_1 - \mathcal{A}_2\right| \tag{17}$$

și a intensității undei rezultante:

$$\mathcal{I}_{P\min} = \mathcal{I}_1 + \mathcal{I}_2 - 2\sqrt{\mathcal{I}_1 \mathcal{I}_2} \tag{18}$$

Locul geometric al punctelor în care interferența se manifestă distructiv îl constituie familia de hiperbole (hiperboloizi) având drept ecuație relația (16). Aceste curbe sunt dispuse alternant cu cele corespunzătoare maximelor de interferență, între două maxime aflându-se un minim și reciproc. În fig. 1.122 cele două familii sunt redate cu plin – cele corespunzătoare maximelor – și cu punctat– cele corespunzătoare minimelor de interferență. Coincidența cu imaginea obținută experimental (fig. 1.119) confirmă coerența surselor S_1 și S_2 constituite de vârfurile acelor sudate pe furca diapazonului.

Dacă diferența fazelor oscilațiilor produse în punctul considerat de către undele componente variază în timpul observației (nu este constantă în timp), intensitatea undei rezultante este egală cu suma intensităților undelor componente:

$$\mathcal{I} = \mathcal{I}_1 + \mathcal{I}_2$$

În acest caz, fenomenul de interferență nu are loc; sursele nu sunt coerente.

Imaginea de interferență nu apare dacă se folosesc două ace sudate la două diapazoane ce emit sunete de frecvențe diferite. Chiar dacă frecvența diapazoanelor este aceeași, datorită amortizării poate apărea o diferență de fază variabilă în timp, ceea ce conduce la deteriorarea imaginii de interferență.

Exercițiu aplicativ

Enunț: Într-o cuvă cu apă de dimensiuni mari se produc unde liniare sinusoidale de frecvență dată. Paralel cu frontul lor de undă se așază un paravan prevăzut cu două deschideri înguste, identice, situate la distanța $d = 5$ cm una de cealaltă (fig. 1.123). Se urmărește dispunerea maximelor și minimelor de interferență la distanța $L = 80$ cm de planul paravanului.

a) Exprimați pozițiile minimelor de interferență în raport cu mediatoarea segmentului ce unește deschiderile S_1 și S_2.

b) Calculați lungimea de undă a undelor pe suprafața apei știind că distanța dintre două minime consecutive la distanța L de paravan este $i = 16$ cm.

Soluție: Deschiderile practicate în paravan devin surse secundare coerente, în fază și de aceeași amplitudine, punctele S_1 și S_2 făcând parte din același front de undă liniar. În punctul P aflat pe dreapta OP paralelă cu planul S_1S_2 interferă unde ce pot fi considerate sinusoidale, dat fiind $L \gg \lambda$. Diferența lor de drum $\Delta r = r_1 - r_2$ poate fi aproximată prin segmentul $\overline{S_1A}$, unde A este piciorul perpendicularei duse din S_2 la direcția S_1P.

Avem $(\Delta_{dr} S_1S_2A \sim \Delta_{dr} MOP)$: $\sin\theta = \dfrac{\overline{S_1A}}{S_1S_2} = \dfrac{\overline{OP}}{MP} \approx \dfrac{\overline{OP}}{MO}$, deci: $\dfrac{\Delta r}{d} \approx \dfrac{x}{L}$ unde $x = \overline{OP}$ este poziția unuia dintre minimele de interferență.

În aceste condiții: $(\Delta r)_{min} = \left(k + \dfrac{1}{2}\right)\cdot\lambda$, unde $k = 0, \pm1, \pm2, \pm3, \ldots$

Rezultă pozițiile minimelor, marcate prin puncte întunecate:

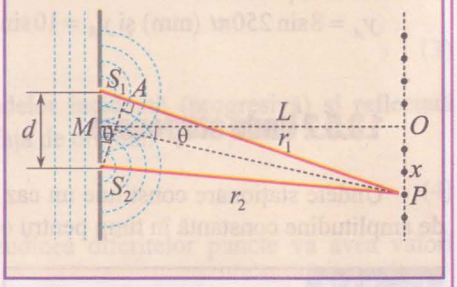
$$x_k = \frac{L}{d}\cdot(\Delta r)_{min} = \left(k + \frac{1}{2}\right)\frac{L\lambda}{d}$$

b) Distanța dintre două minime consecutive: $i = x_{k+1} - x_k = \dfrac{L\lambda}{d}$

Rezultă $\lambda = \dfrac{id}{L} = \dfrac{16\cdot5}{80} = 1$ cm

Aproximația utilizată $\lambda \ll L$ este, deci, corectă.

Fig. 1.123



Exerciții și probleme propuse

1. În fiecare din schemele din fig. 1.124 există o sursă punctiformă de ultrasunete S și două deschideri S_1 și S_2 punctiforme într-un paravan (surse secundare). Distanțele de la sursă la deschideri și de la acestea până la un punct M sunt indicate în cm.

(1) Calculați în fiecare caz diferența de drum la punctul M;

(2) Știind că lungimea de undă este 8 mm, determinați situațiile în care în punctul M:

a) interferența este constructivă;

b) interferența este distructivă.

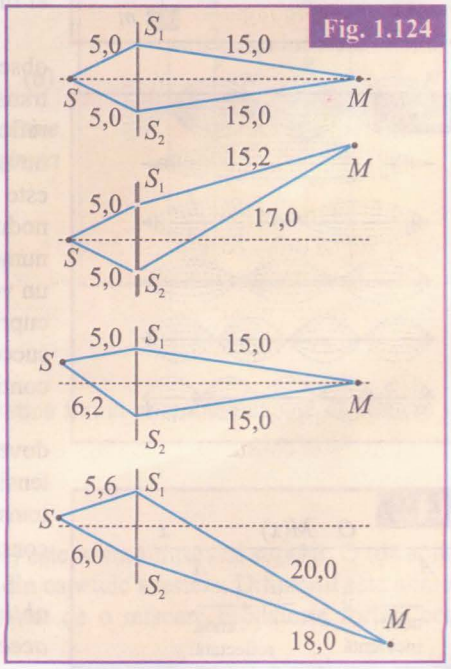
2. Două difuzoare identice sunt așezate față în față. Ele emit același sunet și oscilează în fază. Frecvența sunetului emis este de 1600 Hz, iar viteza de propagare în aer este 336 ms^{-1}.

Distanța dintre centrele S_1 și S_2 ale difuzoarelor este 120 cm.

a) Un microfon este așezat în mijlocul O al segmentului $\overline{S_1S_2}$. Explicați de ce intensitatea sunetului captat în acest punct este maximă.

b) Care sunt punctele M de pe dreapta S_1S_2 pentru care intensitatea sunetului captat este, de asemenea, maximă? Reperați aceste puncte prin abscisa lor $x = \overline{OM}$.

Fig. 1.124



c) Se aşază acum microfonul într-un punct situat la 169 cm de S_1 şi 106 cm de S_2.

Caracterizaţi intensitatea sunetului captat în acest punct.

3. Două surse oscilează într-un mediu elastic, conform ecuaţiilor:

$y_1 = 2\sin 10\pi t$ (cm) şi $y_2 = 1{,}5\sin 10\pi t$ (cm)

Viteza de propagare a celor două unde este $v = 2\ \text{ms}^{-1}$. Calculaţi:

a) amplitudinea undei rezultante într-un punct al mediului pentru care diferenţa de drum la cele două surse este $\Delta r = 10$ cm;

b) pentru ce valori ale diferenţei de drum amplitudinea undei rezultante este minimă;

c) valoarea minimă a amplitudinii rezultante.

4. La extremităţile A şi B ale unei şine având densitatea $\rho = 2700\ \text{kg m}^{-3}$ şi modulul lui Young $E = 6{,}75\cdot 10^{10}\ \text{Nm}^{-2}$ sunt plasate două surse de oscilaţii ale căror ecuaţii sunt:

$y_A = 8\sin 250\pi t$ (mm) şi $y_B = 10\sin 250\pi t$ (mm).

Calculaţi:

a) lungimea barei AB, dacă într-un punct intermediar C oscilaţiile provenite de la cele două surse se scriu:

$$y_{A/C} = 8\sin\left(250\pi t - \frac{\pi}{2}\right) \text{ (mm)}$$

şi respectiv

$$y_{B/C} = 10\sin\left(250\pi t - \frac{\pi}{4}\right) \text{ (mm)}$$

b) amplitudinea undei rezultate prin suprapunerea undelor generate de cele două surse în punctul C.

c) Cele două surse sunt dispuse acum la capetele unei şine din acelaşi material, cu lungimea de 4 ori mai mare. Considerând că nu au loc reflexii, studiaţi amplitudinea $\mathcal{A}$ a oscilaţiilor unui punct al şinei situat la distanţa x de capătul A al şinei. Reprezentaţi grafic $\mathcal{A}(x)$ pentru $x \in [0, l]$, unde $l = \overline{AB}$.

1.3.5.2 Unde staţionare

Undele staţionare constituie un caz particular de interferenţă a undelor plane, caracterizat prin stări de oscilaţie de amplitudine constantă în timp pentru orice punct al mediului.

Fig. 1.125

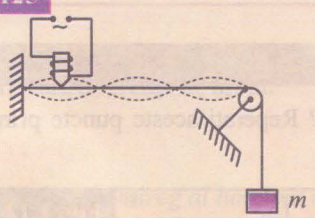


Fig. 1.126

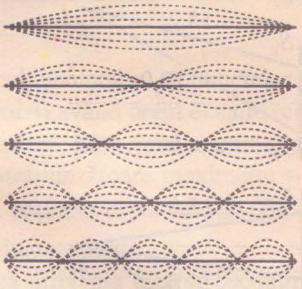
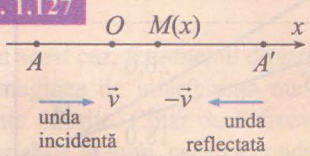


Fig. 1.127



EXPERIMENT

Un fir metalic din material feromagnetic este fixat la unul din capete, celălalt capăt fiind trecut peste un scripete fix şi tensionat cu ajutorul maselor marcate m (fig. 1.125). Un electromagnet alimentat în curent alternativ (de frecvenţă $\upsilon = 50$ Hz) este plasat în apropierea capătului fix al firului.

Pentru anumite valori ale masei m, deci ale tensiunii în fir, puteţi observa formarea unor „fuse" (fig. 1.126) caracteristice. Unda incidentă transversală produsă de sursa perturbatoare (electromagnet) şi unda reflectată pe extremitatea firului interferă, apărând stări de oscilaţie care nu se deplasează în timp, fiind staţionare. Punctele în care amplitudinea este constant nulă sunt numite *noduri*. Un „fus" este cuprins între două noduri consecutive. Punctele în care amplitudinea este maximă poartă numele de *ventre*. Punctele intermediare ale firului, situate între un nod şi un ventru, oscilează cu amplitudini constante în timp, ale căror valori sunt cuprinse între 0 şi valoarea maximă atinsă în ventru. Persistenţa imaginilor succesive ale punctelor în oscilaţie pe retină dă impresia unor „pânze" continue pe întinderea fuselor.

Apariţia „fuselor" indică formarea undelor staţionare. Experimentul dovedeşte că lungimea unui fus depinde de tensiunea în fir. La rândul său, tensiunea în fir determină viteza de propagare şi deci lungimea undelor transversale λ ce se propagă în fir. Prin urmare, distanţa dintre două noduri consecutive (două ventre consecutive) depinde de lungimea de undă.

Vom demonstra teoretic acest fapt, admiţând că *unda staţionară se obţine prin suprapunerea a două unde plane de aceeaşi frecvenţă şi aceeaşi amplitudine ce se propagă în sensuri opuse.*

Să presupunem că astfel de unde se propagă de-a lungul direcției AA', cea incidentă de la A spre dreapta și cea reflectată de la A' spre stânga (fig. 1.127).

Admitem ca origine a unei axe de coordonate pe această direcție punctul O, în care cele două unde sunt în fază. Drept origine a timpului considerăm momentul în care faza inițială a celor două unde este nulă în punctul O.

Astfel, ecuația undei ce se propagă spre dreapta și atinge un punct oarecare M al mediului, de abscisă x, va avea forma:

$$y_1(x,t) = \mathcal{A}\sin 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x}{v\cdot T}\right) = \mathcal{A}\sin 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right) \quad (1)$$

unde v – viteza de propagare a undei.

Ecuația undei ce se propagă de la dreapta spre stânga (fără salt de fază la reflexie) se scrie, analog:

$$y_2(x,t) = \mathcal{A}\sin 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x}{-v\cdot T}\right) = \mathcal{A}\sin 2\pi\left(\frac{t}{T} + \frac{x}{\lambda}\right) \quad (2)$$

Prin suprapunere în $M(x)$, se obține ecuația undei rezultante:

$$y(x,t) = y_1(x,t) + y_2(x,t) = \mathcal{A}\left[\sin\left(\omega t - 2\pi\frac{x}{\lambda}\right) + \sin\left(\omega t + 2\pi\frac{x}{\lambda}\right)\right] =$$

$$= 2\mathcal{A}\cos 2\pi\frac{x}{\lambda}\cdot\sin\omega t$$

Ecuația undei staționare rezultate:

$$y(x,t) = 2\mathcal{A}\cos 2\pi\frac{x}{\lambda}\cdot\sin\omega t \quad (3)$$

arată că fiecare punct al mediului oscilează cu pulsația ω, comună undelor incidentă (progresivă) și reflectată (regresivă). Amplitudinea rezultantă depinde însă de poziția x a punctului față de origine:

$$\mathcal{A}(x) = 2\mathcal{A}\cos 2\pi\frac{x}{\lambda} \quad (4)$$

Întrucât cosinusul are valori absolute cuprinse între 0 și 1, amplitudinea diferitelor puncte va avea valori cuprinse între 0 (noduri) și $2\mathcal{A}$ (ventre).

Pozițiile ventrelor corespund soluțiilor ecuației: $\cos 2\pi\frac{x_v}{\lambda} = \pm 1$

adică: $x_v = k\frac{\lambda}{2}$, unde $k \in \mathbb{N}$ (5)

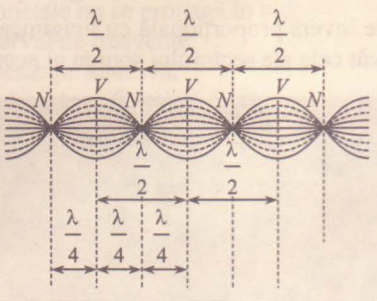
Pozițiile nodurilor corespund ecuației: $\cos 2\pi\frac{x_N}{\lambda} = 0$

adică: $x_N = (2k+1)\frac{\lambda}{2}, k \in \mathbb{N}$: (6)

Un calcul simplu arată că *distanța dintre două ventre consecutive este egală cu distanța dintre două noduri consecutive (adică lungimea unui fus) și are valoarea* $\frac{\lambda}{2}$ (fig. 1.128).

Distanța dintre un nod și ventrul vecin este $\frac{\lambda}{4}$.

Fig. 1.128



Vibrațiile corzilor fixate la ambele capete

O perturbație transversală sinusoidală apărută într-o coardă elastică fixată la ambele capete dă naștere undelor staționare. Întrucât capetele sunt fixate, acestea vor constitui noduri.

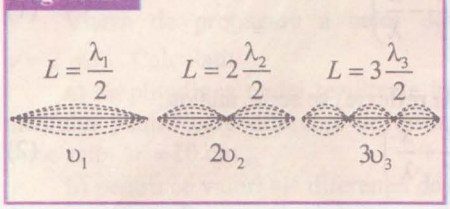
EXPERIMENT

O coardă metalică (de chitară, vioară sau alt instrument cu corzi) este întinsă între doi suporți. O tijă solidară cu membrana unui difuzor este în contact cu coarda în apropierea unuia din capetele acesteia. Difuzorul este alimentat de un generator de joasă frecvență. Sistemul generator-difuzor-tijă animat de o mișcare oscilatorie forțată constituie excitatorul, iar coarda – rezonatorul.

Modificând frecvența υ a excitatorului prin reglarea generatorului, vom observa pentru anumite frecvențe formarea în coardă a fuselor caracteristice undelor staționare. Amplitudinea în centrul fuselor ia valori mari pentru frecvențele $\upsilon_1, 2\upsilon_1, 3\upsilon_1, \ldots$

Numărul de fuse (1, 2, 3, ...) este proporțional cu frecvența impusă de excitator (fig. 1.129).

Fig. 1.129



Frecvențele $\upsilon_1, 2\upsilon_1, 3\upsilon_1, \ldots$ pentru care amplitudinea este maximă sunt frecvențe de rezonanță. O coardă întinsă constituie deci un *rezonator cu frecvențe multiple*. Acestea sunt frecvențe proprii numite *armonicele* frecvenței fundamentale υ_1.

Într-adevăr, la formarea fuselor, lungimea corzii poate fi: $\frac{\lambda_1}{2}, 2\frac{\lambda_1}{2}, 3\frac{\lambda_1}{2}$ sau în general orice multiplu întreg de jumătăți de lungime de undă

$$\lambda_1 = \frac{v}{\upsilon_1}.$$

Într-o coardă de lungime L pot forma fuse numai oscilațiile care dau naștere unor unde cu lungimea de undă:

$$2L, \frac{2L}{2}, \frac{2L}{3}, \ldots, \frac{2L}{n} \quad (n = 1, 2, 3, \ldots)$$

Viteza de propagare v fiind aceeași pentru toate frecvențele (aceeași tensiune în coardă – mediu nedispersiv) rezultă că frecvențele pentru care obținem fuse sunt:

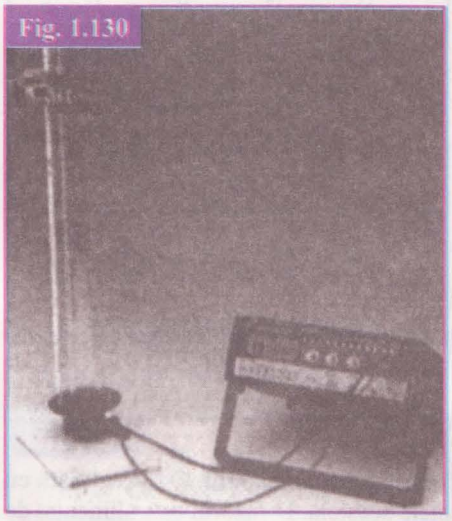
$$\upsilon_1 = \frac{v}{2L}, \upsilon_2 = \frac{2v}{2L} = \frac{v}{L} = 2\upsilon_1, \upsilon_3 = \frac{3v}{2L} = 3\upsilon_1, \upsilon_4 = 4\upsilon_1, \ldots$$

Frecvența fundamentală, care corespunde formării unui singur fus, este cea mai joasă: $\upsilon_1 = \frac{v}{2L}$. Celelalte, numite *armonice* superioare, sunt multipli întregi ai celei fundamentale. Ele formează o *serie armonică*. Fiecare din armonici corespunde unui mod normal de oscilație. Când coarda unui instrument muzical (vioară, ghitară, pian) este excitată (prin frecare cu arcușul, prin ciupire sau prin lovire), în vibrația rezultantă este prezentă nu numai vibrația fundamentală, ci și multe dintre armonice. Mișcarea ei este o superpoziție de moduri normale. Frecvența fundamentală a coardei vibrante este :

$$\upsilon_1 = \frac{1}{2L}\sqrt{\frac{T}{\mu}}$$

unde T = tensiunea corzii, reglată prin „acordarea" instrumentului, iar μ – densitatea ei liniară. Faptul că frecvența este invers proporțională cu lungimea sa L este ilustrat de corzile basilor pianului sau contrabasului, mult mai lungi decât cele ale sectorului sopran al acestor instrumente sau decât corzile viorii.

Fig. 1.130



Corzile basilor se înfășoară cu sârmă pentru a le mări densitatea liniară, în scopul micșorării frecvenței lor fundamentale.

Vibrațiile tuburilor sonore

EXPERIMENT

La una din extremitățile unui tub de sticlă (fig. 1.130) se montează un difuzor alimentat de un generator de frecvență reglabilă. Variind frecvența sunetului emis, constatăm o întărire a sunetului pentru anumite frecvențe: $\upsilon_1, 2\upsilon_1, 3\upsilon_1, \ldots$.

Aerul din tub constituie rezonatorul, iar difuzorul excitatorul. Rezonatorul posedă frecvențe multiple pentru care intră în rezonanță, când devine sediul unor unde staționare. Dacă tubul este deschis la ambele capete, lungimile de undă λ_k satisfac relația:

$$L = k\frac{\lambda_k}{2} = k\frac{c}{2\upsilon_k}$$

unde L – lungimea tubului, c – viteza de propagare a sunetului, iar $k = 1, 2, 3, \ldots$

Rezultă că frecvențele de rezonanță, numite armonice, $\upsilon_k = k\dfrac{c}{2L}$ sunt multipli întregi ai frecvenței fundamentale:

$$\upsilon_1 = \frac{c}{2L}$$

Instrumentele muzicale cu tuburi (orga, trombonul) folosesc tuburi sonore deschise sau închise care sunt rezonatori de frecvențe multiple.

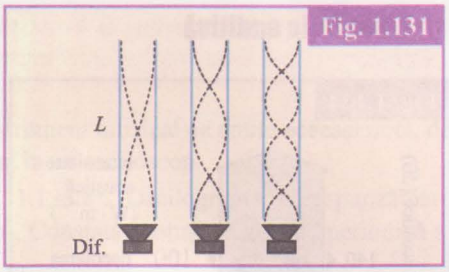


Fig. 1.131

Exercițiu aplicativ

Enunț: Un tub de orgă A, cu lungimea de 60 cm, închis la un capăt, vibrează cu frecvența celei de a doua armonice. Un alt tub de orgă, B, cu lungimea de 40 cm, deschis la ambele capete, vibrează cu frecvența fundamentală. Considerați viteza sunetului în aer $c = 340\ \text{ms}^{-1}$. Calculați:

a) frecvența sunetului emis de A;

b) frecvența sunetului emis de B.

Soluție: Pentru tubul A, închis la unul dintre capete (fig. 1.132.a):

$$L_A = 2\frac{\lambda_A}{2} + \frac{\lambda_A}{4} = \frac{2\lambda_A}{4} = \frac{5}{4}\frac{c}{\upsilon_A} \text{ rezultă } \upsilon_A = \frac{5c}{4L} = 708{,}3\ \text{Hz}$$

Pentru tubul B avem (fig. 1.132.b):

$$L_B = \frac{\lambda_B}{2} = \frac{c}{2\upsilon_B} \text{ de unde } \upsilon_B = \frac{c}{2L} = 425\ \text{Hz}$$

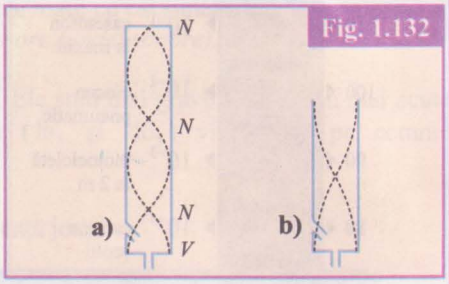


Fig. 1.132

1.3.6 Acustica

Acustica este capitolul fizicii care se ocupă cu studiul producerii, propagării și al proprietăților sunetelor.

Am definit sunetele ca fiind oscilațiile mecanice capabile să impresioneze organul auditiv al omului – urechea (receptor). Undele sonore sunt unde mecanice longitudinale ce se propagă în solide, lichide și gaze, despre care am discutat în paragrafele anterioare.

Pentru a fi percepute de ureche, undele sonore trebuie să îndeplinească următoarele condiții:

– să fie produse de o sursă sonoră, adică de un corp care adus în stare de oscilații emite sunete în urma excitării mecanice printr-un procedeu dat (corzi vibrante, coloane de aer vibrante, plăci, membrane vibrante, lame vibrante etc.);

– să existe un mediu elastic de propagare între sursa sonoră și receptor; sunetele nu se propagă în vid;

– frecvența oscilațiilor sunetelor trebuie să fie cuprinsă într-un anumit interval de frecvențe;

– intensitatea undelor sonore trebuie să fie suficientă pentru a produce o senzație auditivă;

– durata sunetului trebuie să depășească un interval de timp minim ($\cong 0{,}05$ s) pentru a fi sesizat de organul auditiv.

Percepția sunetelor

Urechea este organul auditiv, constituind un receptor sonor.

O ureche omenească normală percepe sunete cu frecvențele cuprinse între circa 20 Hz și 20 000 Hz. Aceste limite variază de la un individ la altul și se modifică cu vârsta, sub efectul expunerii prelungite la zgomot sau în urma unor afecțiuni netratate (otite). Sunetele de frecvențe puțin inferioare lui 20 Hz, numite *infrasunete*, nu produc senzații auditive. Unele infrasunete sunt totuși percepute la nivelul cuștii toracice.

Sunetele cu frecvențe de peste 18 kHz, numite *ultrasunete*, nu produc nici ele senzații auditive la om.

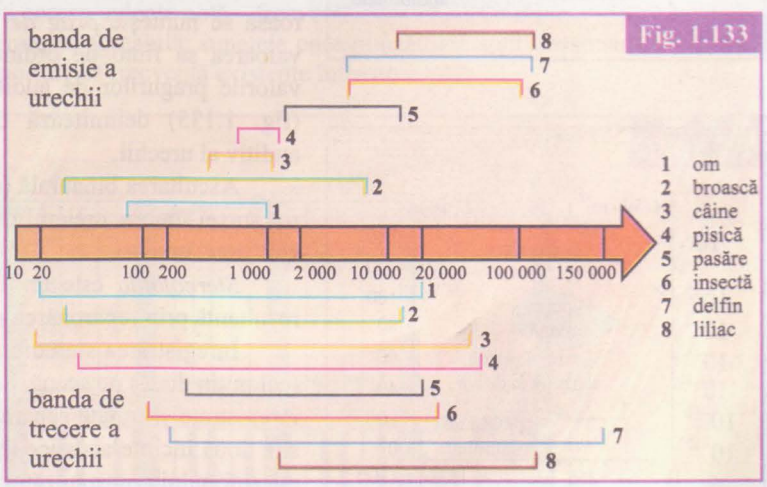


Fig. 1.133

În fig. 1.133 sunt redate benzile de trecere ale urechii omului și ale câtorva specii de animale.

Senzația auditivă

Fig. 1.134

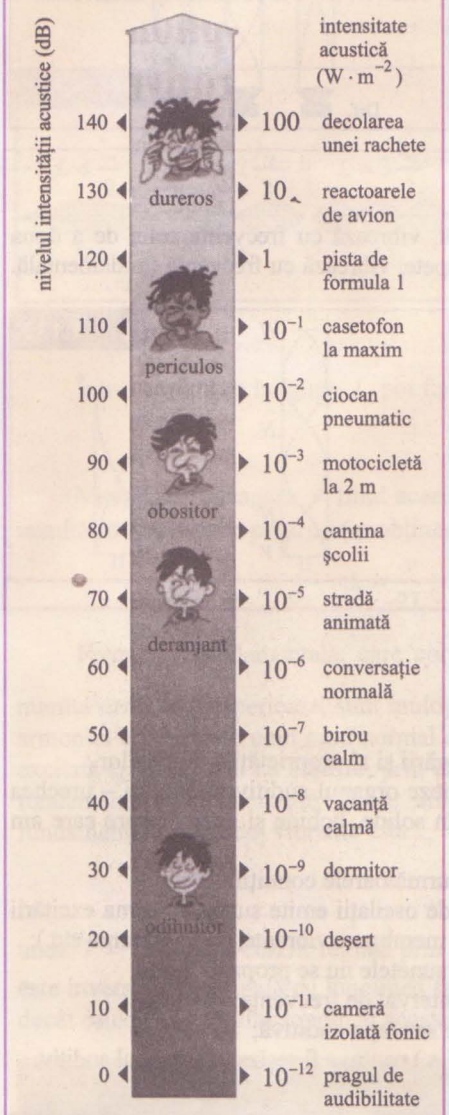
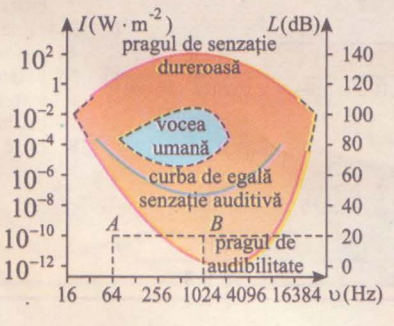


Fig. 1.135



Senzația auditivă depinde de *intensitatea sunetelor* recepționate. Undele sonore transportă energie, care este primită parțial de timpan.

Se definește *intensitatea acustică* (sonoră) I ca fiind puterea acustică recepționată pe unitatea de arie a receptorului. Ea se măsoară în Wm^{-2}.

Urechea este un receptor de foarte mare sensibilitate, detectând sunete ale căror intensități acustice sunt cuprinse între 10^{-12} Wm^{-2} (pragul de audibilitate) și 10^{2} Wm^{-2} (pragul de durere).

Senzația auditivă nu este, însă, proporțională cu intensitatea acustică. Dacă într-o sală unde funcționează un difuzor se instalează un al doilea difuzor ce reproduce același sunet, senzația auditivă nu se modifică. Deși intensitatea acustică se dublează, ascultătorul nu percepe un sunet de două ori mai puternic. De aceea s-a definit o mărime corelată cu senzația auditivă a urechii, numită *nivelul intensității acustice*.

Nivelul intensității acustice, L (simbol provenit de la termenul *level* = nivel, în limba engleză), *se măsoară în decibeli* (dB) *cu aparatul numit sonometru*. (Denumirea unității de măsură a fost dată în onoarea lui Graham Bell (1847-1920), inventatorul telefonului în 1876.)

S-a stabilit experimental că nivelul intensității acustice, L, depinde logaritmic de intensitatea sonoră, după legea fizico- psihică a lui Weber și Fechner:

$$L \sim \lg I$$

Astfel, dacă intensitatea acustică se dublează, nivelul intensității acustice crește cu numai 3 dB. Iar dacă intensitatea acustică crește de 10 ori, nivelul intensității acustice crește cu 10 dB.

În fig. 1.134 vă este prezentată în paralel o scară a intensităților acustice și scara corespunzătoare a nivelelor de intensitate acustică.

Senzația auditivă depinde de frecvență. Urechea prezintă o sensibilitate maximă în jurul frecvenței de 3000 Hz.

Nivelul acustic sub care un sunet nu mai este perceptibil la o frecvență dată poartă numele de *prag al percepției* (de audibilitate).

Valoarea sa la 1 kHz este prin convenție egală cu 0 dB. Pragul de audibilitate variază cu frecvența și prezintă un minim între 2 kHz și 5 kHz (sensibilitate mare).

Nivelul acustic deasupra căruia sunetul provoacă o senzație dureroasă se numește *prag de durere*. El variază foarte puțin cu frecvența, valoarea sa fiind de ordinul a 130 dB. Cele două curbe reprezentând valorile pragurilor de audibilitate și de durere pentru diferite frecvențe (fig. 1.135) delimitează domeniul audibilității sunetelor sau câmpul auditiv al urechii.

Ascultarea binaurală (cu două urechi) ne permite în general localizarea sursei sonore, creierul interpretând ușoarele diferențe de percepție între cele două urechi.

Stereofonia este un sistem de redare sonoră ce recrează impresia rezultantă prin repartizarea surselor sonore în spațiu.

Înregistrarea stereofonică constă în plasarea mai multor microfoane (cel puțin două) pe scenă. Semnalele captate de cele două microfoane sunt înregistrate și tratate separat. Reproducerea sunetului în stereofonie necesită două incinte acustice (boxe). Fiecare dintre acestea redă înregistrarea microfonului corespunzător și trebuie să fie plasate de o parte și de alta a ascultătorului.

EXPERIMENT

Vom începe prin a compara sunetele emise de un diapazon și de un instrument muzical ce emite aceeași notă, de exemplu un la_3. Înregistrăm aceste sunete cu ajutorul unui microfon conectat la un osciloscop.

Oscilograma corespunzătoare diapazonului este o sinusoidă (fig. 1.136.a). Oscilograma corespunzătoare aceleiași note (la_3) cântată de o vioară este o curbă complexă (fig. 1.136.b). Constatați totuși că ea este periodică și are aceeași perioadă ca și sinusoida diapazonului.

Sunetul emis de diapazon este un sunet pur. Sunetul emis de un instrument muzical este un sunet complex. Un sunet muzical este periodic.

Calitățile sunetelor sunt: intensitatea, înălțimea și timbrul.

1. Intensitatea

Cu ajutorul aceluiași instrument muzical se poate produce un sunet mai mult sau mai puțin puternic (de la fortissimo la pianissimo). Amplitudinea semnalului vizualizat va fi cu atât mai mare cu cât sunetul este mai intens.

Intensitatea unui sunet depinde de valoarea amplitudinii vibrațiilor sonore (undei sonore).

2. Înălțimea

Notele gamei (do, re, mi, fa, ...) sunt percepute de ureche ca diferite. Ele sunt mai grave (joase) sau mai acute (înalte). Semnalele periodice corespunzătoare la două sunete diferite (la_3 și do_3) vizualizate pe ecranul osciloscopului au frecvențe diferite (fig. 1.137 a și b).

Calitatea sunetului determinată de frecvență se numește înălțime.

Un sunet acut (ascuțit) are o frecvență înaltă; un sunet grav are o frecvență joasă.

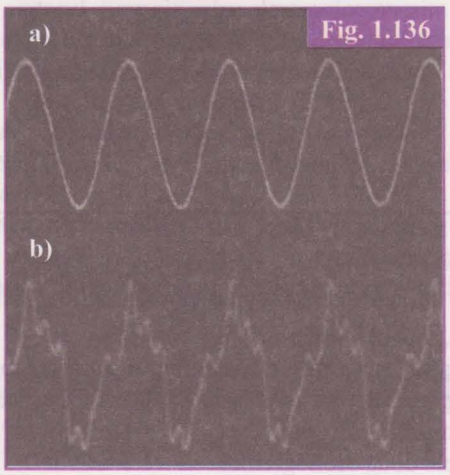


Fig. 1.136

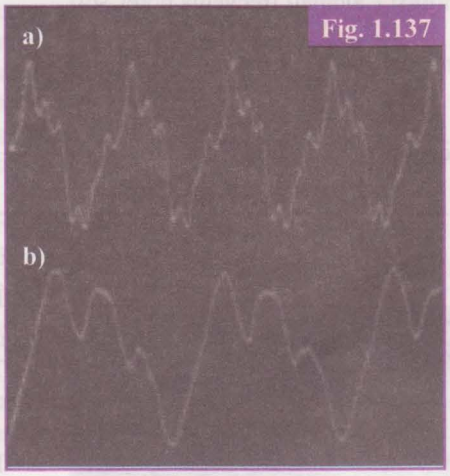


Fig. 1.137

În muzică, nota la_3, a cărei frecvență este de 440 Hz, servește drept reper. Fiecărei note muzicale îi corespunde o frecvență bine determinată. În fig. 1.138 aveți corespondența notă – frecvență.

Anumite raporturi de frecvențe dau o impresie agreabilă; sunetele corespunzătoare sunt consonante. Diferitele game sunt concepute plecând de la anumite raporturi de frecvență existente între note.

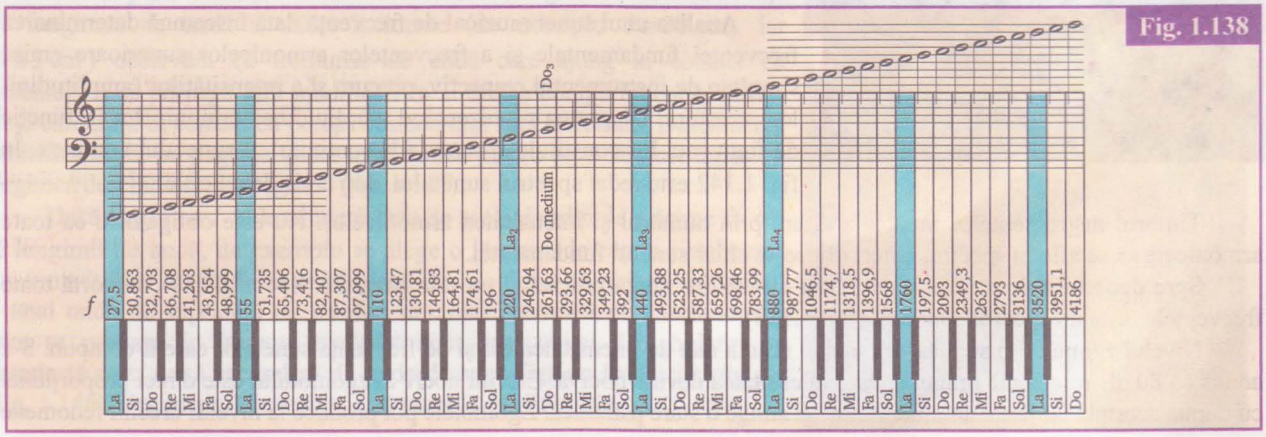
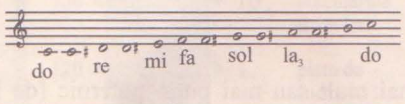


Fig. 1.138

Notă documentară

Elaborată în sec. al XVII–lea de Werckmeister (1645-1706) pentru a uşura transpunerea partiturilor instrumentelor cu corzi la instrumentele cu clape, *gama temperată* a inspirat pe compozitorii J. S. Bach (1685-1750) şi J.-P. Rameau (1683-1764), care au contribuit la răspândirea ei. O gamă este o suită de sunete ce se succed pe un interval de o octavă. Octava este împărţită în 12 semitonuri distincte. Frecvenţele a două note distincte plasate la un interval de semiton satisfac relaţia:

Fig. 1.139



$$\left(\frac{\upsilon_1}{\upsilon_2}\right)^{12} = 2$$

adică

$$\frac{\upsilon_1}{\upsilon_2} = \sqrt[12]{2} = 1{,}06$$

Pe principiul gamei temperate sunt construite pianele şi orgile, la care cu ajutorul a şapte clape albe şi cinci negre (pentru diezi # şi bemoli *b*) sunt produse toate sunetele dintr-o octavă (fig. 1.139). O notă alterată de un diez creşte în înălţime cu un semiton. Alterată de un bemol, scade cu un semiton.

Exerciţiu aplicativ

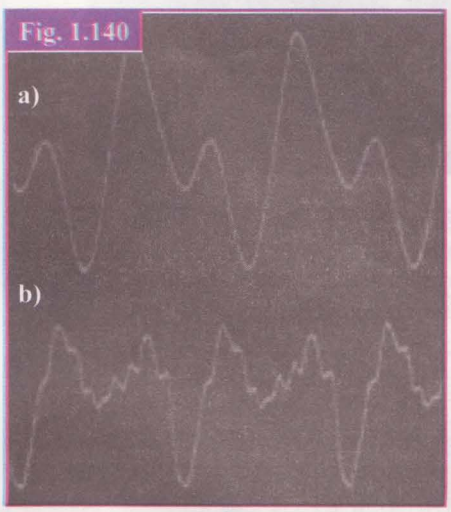
Enunţ: Calculaţi frecvenţa notei sol_3.

Soluţie: $\frac{\upsilon_{la_3}}{\upsilon_{la_3\#}} = 1{,}06$ şi $\frac{\upsilon_{la_3\#}}{\upsilon_{sol_3}} = 1{,}06$.

Rezultă $\frac{\upsilon_{la_3}}{\upsilon_{sol_3}} = (1{,}06)^2$, deci $\upsilon_{sol_3} = \frac{440\ Hz}{(1{,}06)^2} = 392\ Hz$.

3. Timbrul

Fig. 1.140



În fig. 1.140 sunt prezentate oscilogramele notei do_3 cântată de două instrumente diferite, vioară şi trombon.

Timbrul este calitatea sunetului ce permite urechii să perceapă distinct două sunete complexe de aceeaşi înălţime şi de aceeaşi intensitate, produse de instrumente muzicale diferite.

Prin ce se disting cele două oscilograme?

Prin complexitatea sunetelor emise.

Un sunet complex de frecvenţă υ poate fi descompus într-o „serie Fourier" (J. Fourier – fig. 1.141) finită de sunete simple de frecvenţe υ, 2υ, 3υ, ... Sunetul simplu de frecvenţă υ se numeşte sunet *fundamental*, iar cele de frecvenţe 2υ, 3υ, ... poartă numele de *armonici superioare*.

Analiza unui sunet muzical de frecvenţă dată înseamnă determinarea frecvenţei fundamentale şi a frecvenţelor armonicelor superioare emise simultan de instrumentul respectiv, precum şi a intensităţilor (amplitudinilor) acestora. Diagrama reprezentând amplitudinea armonicelor în funcţie de frecvenţa lor constituie *spectrul* (discontinuu) al sunetului complex. În fig. 1.142 este redat spectrul sunetului do_3 emis de un oboi.

Timbrul instrumentelor muzicale diferă prin numărul şi intensitatea armonicelor. Nu este obligatoriu ca toate armonicele să se afle în spectru. Uneori lipseşte chiar sunetul fundamental.

Spre deosebire de sunete, un zgomot nu are frecvenţă precisă şi nu este periodic. Spectrul său comportă toate frecvenţele; este un spectru continuu (fig. 1.143).

Nivelul zgomotului se măsoară ţinând seama atât de intensitatea cât şi de frecvenţa sunetelor care îl compun. S-a admis că 80 dB reprezintă pragul la care intensitatea devine nocivă. Efectul nociv al zgomotului este direct proporţional cu durata acestuia iar peste anumite limite se atinge o stare psihotică. Zgomotele pot produce la nivelul urechii fenomene

Fig. 1.141

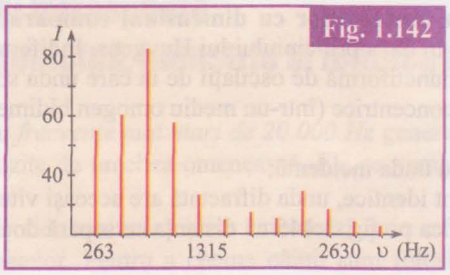


Fig. 1.142

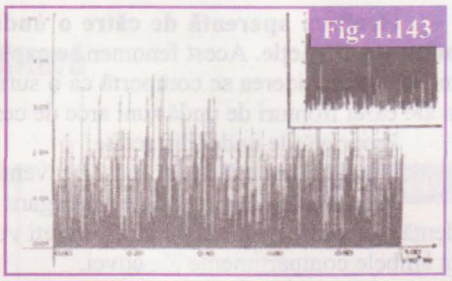


Fig. 1.143

de oboseală, traumatisme sonore sau surzitate profesională. Oboseala auditivă constă într-o scădere temporară a pragului percepției auditive și se accentuează prin mărirea intensității, a frecvenței sau a timpului de expunere.

Traumatismul sonor constă în ruptura timpanului produsă de un zgomot de intensitate mare (explozii, împușcături). După vindecarea leziunii persistă surdiatea pentru frecvențe înalte. Surditatea profesională se datorează efectuării anumitor activități expuse în mod deosebit la zgomot (muncă în hale industriale, controlori de trafic aerian etc.) și duce la pierderea definitivă și ireversibilă a audiției.

Măsurile de combatere a zgomotului se impun ca o măsură de necesitate pentru sănătate. Ele privesc diminuarea zgomotului produs de traficul rutier, a zgomotului industrial și în întreprinderile de construcții-montaj, în diminuarea intensității sonore în discoteci și în jurul acestora, pe terenurile sportive și stadioane.

Notă documentară

Sintetizoarele

Cu ajutorul dispozitivelor electronice numite *sintetizoare* sunt reproduse sunetele instrumentelor muzicale și sunt fabricate sunete cu timbre noi pornind de la frecvențele fundamentale și ale armonicelor superioare. Pentru a reda căldura și caracterul sunetului unui instrument, sintetizorul trebuie să reproducă și desfășurarea temporală a emiterii unui sunet natural, care prezintă o porțiune de atac, un corp și o extincție a sunetului, reproduse în fig. 1.144.

Sintetizoarele numerice utilizate azi permit generarea unor „obiecte" muzicale ce pot fi memorate de un computer, apoi asociate în vederea creării partiturii unei compoziții muzicale de sinteză.

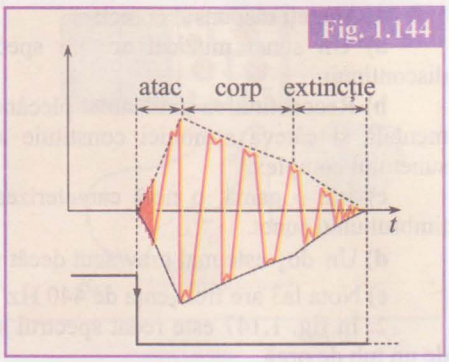


Fig. 1.144

1.3.7* Difracția undelor mecanice

Experiment

Pe suprafața unei cuve cu apă se plasează un obstacol plan cu o deschidere de lărgime reglabilă. Cuva este astfel separată în două medii de propagare a undelor identice. Cu ajutorul unei rigle atașate generatorului de unde determinăm propagarea unei unde de suprafață ale cărei fronturi de undă sunt paralele cu planul deschiderii. Dacă lărgimea l este mare față de lungimea de undă a undei incidente (de exemplu $l \cong 30$ cm, iar $\lambda \cong 1$ cm) observăm că fronturile de undă care ajung în contact cu deschiderea se propagă fără modificări în al doilea compartiment al cuvei. Cele care intră în contact cu pereții obstacolului sunt reflectate. Deschiderea limitează astfel propagarea undei în al doilea mediu pe o lărgime egală cu lărgimea deschiderii (diafragmei) (fig. 1.145).

Dacă lărgimea l a deschiderii este de același ordin de mărime cu cel al lungimii de undă, de exemplu se alege o lărgime de câțiva centimetri. La contactul cu deschiderea unda plană din mediul 1 să nască în mediul 2 unei unde de suprafață cu fronturi circulare, centrată pe deschidere și care se propagă în întregul compartiment 2 al cuvei. Deschiderea se comportă ca o sursă secundară de unde de suprafață cu fronturi circulare (fig. 1.146). Fenomenul descris poartă numele de **difracție**.

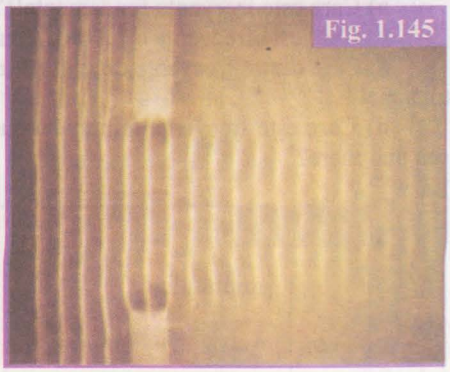


Fig. 1.145

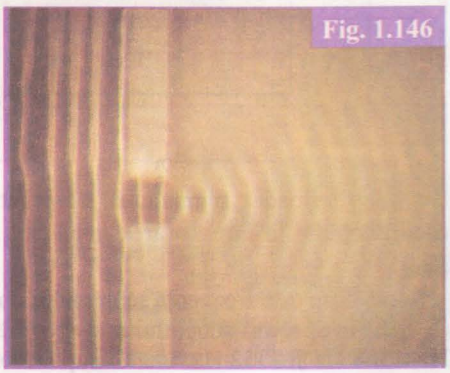


Fig. 1.146

Ocolirea aparentă de către o undă a obstacolelor cu dimensiuni comparabile cu lungimea de undă se numeşte difracţie. Acest fenomen se explică în baza principiului lui Huygens. Indiferent de forma frontului de undă incident deschiderea se comportă ca o sursă punctiformă de oscilaţii de la care unda se propagă în compartimentul 2 şi ale cărei fronturi de undă sunt arce de cerc concentrice (într-un mediu omogen bidimensional).

Proprietăţile undei difractate:

– unda difractată are aceeaşi frecvenţă cu unda incidentă;

– dacă cele două medii de propagare sunt identice, unda difractată are aceeaşi viteză de propagare ca şi cea incidentă şi aceeaşi lungime de undă. Puteţi verifica pe fig. 1.145 că distanţa ce separă două creste succesive este aceeaşi în ambele compartimente ale cuvei.

Undele sonore se difractă şi ele la trecerea printr-o deschidere a cărei lărgime este de acelaşi ordin de mărime ca şi lungimea lor de undă. Cum valoarea medie a lungimii de undă a sunetelor în aer este de 30-40 cm, difracţia se produce la trecerea printr-o uşă sau fereastră deschisă. Cunoaşteţi din experienţă că o persoană aflată într-o cameră nu are nevoie să se aşeze în deschiderea uşii pentru a percepe sunetele provenind din afară. Acestea sunt audibile în orice punct al camerei prin difracţie.

Ornitologii au remarcat că o aceeaşi specie de păsări aveau un cântec de înălţime diferită, după cum trăiau într-un mediu deschis sau mai închis (acoperit). Păsările din pădurea tropicală emit sunete mai grave decât cele din alte medii. Într-adevăr frecvenţele fiind mai mici, lungimile de undă sunt mai mari, valorile lor corespund dimensiunilor medii ale deschiderilor dintre frunzele copacilor care joacă rolul obstacolelor.

Exerciţii şi probleme propuse

1. Alegeţi răspunsul corect:

a) Un sunet muzical are un spectru continuu/ discontinuu.

b) Reconstituirea unui sunet plecând de la fundamentală şi câteva armonici constituie analiza/sinteza sunetului complex.

c) Într-o gamă, o notă caracterizează înălţimea/ timbrul unui sunet.

d) Un do_4 este mai grav/acut decât un do_3.

e) Nota la3 are frecvenţa de 440 Hz/ 880 Hz.

2. În fig. 1.147 este redat spectrul sunetului emis de un tub de orgă.

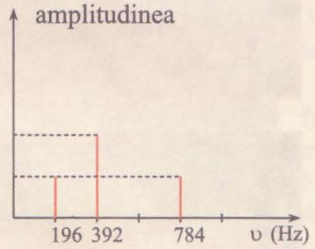
a) Care este frecvenţa fundamentală?

b) Care este frecvenţa celei de a treia armonici?

c) Care dintre frecvenţe determină înălţimea acestui sunet?

d) Care este frecvenţa armonicei cu amplitudinea cea mai mare?

Fig. 1.147



3. Perioada semnalului observat pe ecranul osciloscopului la înregistrarea notei sol_3 emisă de un flaut este 2,55 ms.

a) Care este frecvenţa semnalului observat?

b) În spectrul sunetului mai apar frecvenţele: 784 Hz, 1568 Hz şi 2352 Hz. Identificaţi armonicele.

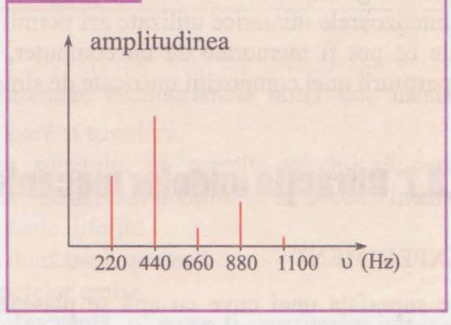
4. În fig. 1.148 este dat spectrul unei note cântate de un violoncel.

a) Câte sunete pure compun acest spectru?

b) Care este frecvenţa fundamentală?

c) Care sunt armonicele inferioare frecvenţei de 1600 Hz absente din spectru?

Fig. 1.148



5. Analiza unui sunet emis de un sintetizor a dat armonicele 220 Hz şi 440 Hz.

a) Justificaţi faptul că frecvenţa 220 Hz nu corespunde sunetului fundamental.

b) Alegeţi dintre frecvenţele de mai jos pe cea a sunetului fundamental: 50 Hz, 110 Hz, 440 Hz.

c) Care este frecvenţa semnalului periodic observat pe osciloscop corespunzător sunetului emis?

6. Se ştie că frecvenţa notei do_3 este 262 Hz, iar a notei mi_3 este 330 Hz.

a) Calculaţi frecvenţele notelor $do_3\#$ şi $mi_3 b$.

b) Nota do a unui clarinet are aceeaşi frecvenţă cu nota si bemol a flautului. Un flaut cântă nota do_3. Care este frecvenţa sunetului emis de un clarinet care ar cânta aceeaşi notă?

1.3.8 Ultrasunete şi infrasunete
Aplicaţii în medicină, industrie şi tehnică militară

Vibraţiile elastice care au *frecvenţe mai mari de 20 000 Hz* generează unde sonore ce nu pot fi auzite de urechea omenească. Ele se numesc *ultrasunete*.

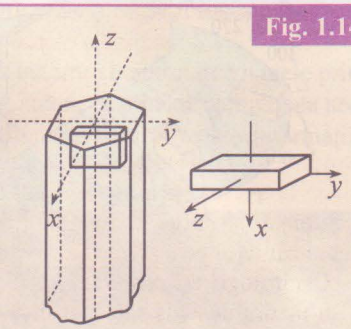
Delfinii, balenele, liliecii etc. comunică şi se orientează prin emiterea şi recepţionarea ultrasunetelor. Pentru a chema câinii sunt folosite fluiere cu ultrasunete.

Sunetele a căror frecvenţă este mai mică de 20 Hz sunt de asemenea inaudibile. Ele se numesc *infrasunete*. Acestea sunt emise, de pildă, de către elefanţi.

Pentru producerea ultrasunetelor se utilizează generatoare electromecanice care funcţionează pe baza fenomenelor de piezoelectricitate şi magnetostricţiune.

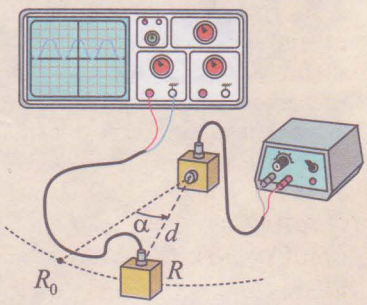
Generatorul piezoelectric. Dacă dintr-un cristal de cuarţ se taie în mod corespunzător o plăcuţă şi pe feţele ei acoperite metalic se aplică o tensiune continuă, plăcuţa se deformează. Când asupra unei astfel de plăcuţe se aplică o tensiune alternativă, ea începe să vibreze cu frecvenţa tensiunii aplicate, devenind o sursă de ultrasunete (fig. 1.149).

Fig. 1.149



Generatorul magnetostrictiv. S-a observat că dimensiunile plăcuţelor construite din anumite substanţe feromagnetice variază prin magnetizare. Dacă acestea sunt dispuse într-un câmp magnetic variabil de o anumită frecvenţă, vor începe să oscileze, devenind surse de ultrasunete (nichel, aliaje de nichel şi cobalt). În ambele cazuri de generare este necesar ca dimensiunile plăcuţelor oscilante să fie astfel alese încât frecvenţa lor proprie să coincidă cu frecvenţa de excitaţie a câmpurilor electric şi respectiv magnetic aplicate. Generatoarele de ultrasunete lucrează deci în regim de rezonanţă.

Fig. 1.150



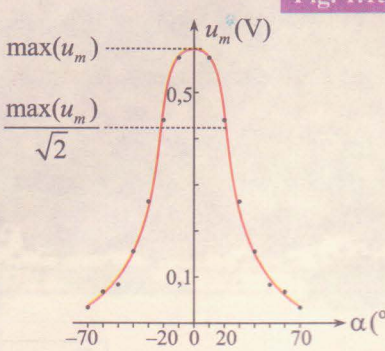
Undele ultrasonore produse prin propagarea ultrasunetelor într-un mediu elastic au aceeaşi natură ca şi undele sonore. Ca şi sunetele, ele nu se propagă în vid, ci numai în medii materiale. Ele au aceeaşi viteză ca şi sunetele. Viteza de propagare a ultrasunetelor în aer este de 340 m/s la temperatura de 20° C şi la $p_0 = 1$ atm .

Proprietăţi ale ultrasunetelor. Aplicaţii

EXPERIMENT

Un generator de ultrasunete alimentat de un generator de joasă frecvenţă emite ultrasunete de o anumită frecvenţă. Un receptor de ultrasunete (generator reversibil) conectat la un osciloscop este rotit în jurul generatorului pe o traiectorie circulară de rază *d*. Semnalul detectat este vizualizat pe ecranul osciloscopului. Se constată că tensiunea detectată este maximă în direcţia emiţător-generator şi scade rapid cu unghiul α (fig. 1.150 şi 1.151).

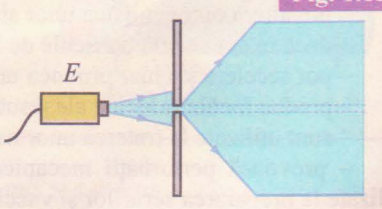
Fig. 1.151



În concluzie, undele ultrasonore se propagă într-un con îngust având generatorul în vârf. Fasciculul de ultrasunete este *directiv*, spre deosebire de undele sonore audibile.

Ultrasunetele produc *fenomenul de difracţie*. La trecerea printr-o deschidere îngustă ale cărei dimensiuni sunt de ordinul de mărime al lungimii sale de undă, unda ultrasonoră îşi pierde directivitatea şi se propagă mai departe într-un fascicul larg (fig. 1.152).

Fig. 1.152



Cum explicaţi fenomenul pe baza principiului lui Huygens?

Fig. 1.153

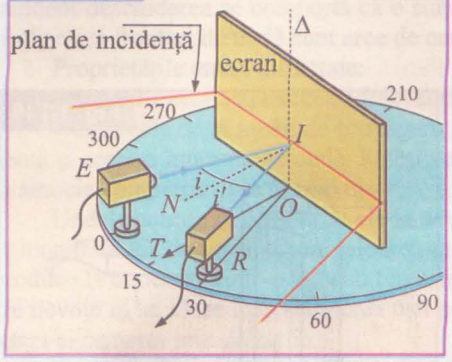
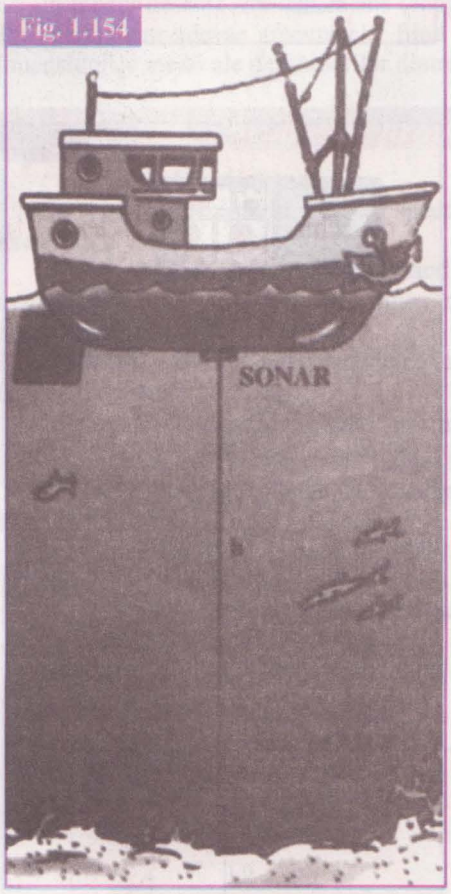


Fig. 1.154



Fenomenul de difracție este specific undelor. Sunetele sunt și ele difractate; lungimile lor de undă fiind de ordinul a 1 m, toate deschiderile și obstacolele obișnuite difractă sunetele.

Un alt fenomen caracteristic undelor ultrasonore (dar și sonore) este reflexia de un obstacol rigid. Liliecii emit unde ultrasonore pe care le detectează apoi, captând ecoul trimis de pereții peșterii, de copaci, stânci etc.

Legile reflexiei undelor ultrasonore pot fi ușor verificate datorită bunei lor directivități; utilizăm un emițător și un receptor de ultrasunete. În fața acestora (fig. 1.153) este așezată o foaie de carton drept obstacol.

Raza incidentă (EI), raza reflectată (IR) și normala (IN) în punctul de incidență sunt coplanare, definind *planul de incidență*.

Pentru diferite poziții ale receptorului R în planul de incidență, amplitudinea semnalului reflectat este maximă pentru $i = i'$. Rezultă că *unghiul de reflexie este egal cu unghiul de incidență.*

Sunetele se reflectă după aceleași legi ca și ultrasunetele. Teatrele antice foloseau acest fenomen pentru ca actorii să fie auziți perfect de toți spectatorii. Sunetele reflectate de pereții verticali și de scenă se suprapun sunetelor ce ajung direct la spectatori. Sălile de concert actuale sunt concepute ținând cont de reflexii.

În lungul autostrăzilor sunt dispuse plăci antifonice reflectătoare pentru a proteja riveranii de zgomot.

Reflexia ultrasunetelor este folosită în funcționarea **sonarului**. Acesta cuprinde un emițător și un receptor de ultrasunete. Sursa emite impulsuri ultrasonore scurte (1 ms – 2 ms) într-un con foarte îngust. Obstacolele (fundul mării, bancuri de pești etc.) le reflectă spre sonar, care, între două serii de impulsuri, detectează ultrasunetul reflectat.

Dacă între emisie și recepție se scurge intervalul de timp τ, adâncimea la care se află obstacolul va fi:

$$h = \frac{\tau}{2} \cdot v$$

unde v este viteza de propagare a ultrasunetelor în apă (fig. 1.154).

Undele ultrasonore sunt rapid atenuate în aer. Energia de vibrație transportată de ele este absorbită de mediu și are drept consecință scăderea rapidă a amplitudinii cu distanța până la emițător. Fenomenul poartă numele de *atenuare*. Atenuarea este cu atât mai rapidă cu cât frecvența ultrasunetelor este mai mare. Ea este mai puternică în gaze decât în lichide.

Pentru o aceeași frecvență, distanța pentru care intensitatea acustică inițială a ultrasunetelor se reduce cu 90% depinde de mediu. Astfel, la frecvența de 100 kHz, această distanță măsoară 5 m în aer și 10 km în apă.

Într-un același mediu, spre exemplu în apă, distanța pentru care intensitatea acustică inițială a ultrasunetelor se reduce la 50% depinde de frecvență, conform tabelului alăturat.

În mod similar, sunetele mai acute sunt mai repede amortizate decât cele grave. De aceea, instrumentele ce emit sunete acute (viorile) sunt dispuse în fața orchestrei.

Frecvența	40 kHz	2 MHz	10 MHz
Distanța	16 km	6,44 m	0,23 m

Efectele produse de ultrasunete și aplicațiile lor:

– duc la omogenizarea unor sisteme disperse, soluții coloidale, emulsii etc.;
– pot altera omogenitatea unor sisteme;
– dacă în aer se află particule de lichid sau solid, dimensiunile acestora pot crește prin acțiunea ultrasunetelor;
– pot accelera și chiar provoca unele reacții chimice;
– produc încălziri locale ale țesuturilor vii prin transferul unei părți a energiei lor;
– sunt utilizate la tratarea unor nevralgii;
– provoacă perturbații mecanice în interiorul celulelor vii. Pot distruge astfel unele microorganisme, fiind utilizate la prepararea serurilor și vaccinurilor, la sterilizarea alimentelor etc.

Notă documentară

Utilizarea ultrasunetelor în medicină

Ecografia medicală. Această tehnică utilizează undele ultrasonore produse de o sondă cu dublu rol: de emițător și de receptor. Frecvențele utilizate depind de organele sau țesuturile biologice de sondat. Astfel, pentru inimă și abdomen frecvența este cuprinsă între 2 MHz și 3MHz, în pediatrie sau pentru organele mici se folosește frecvența de 6 MHz, iar în oftalmologie frecvențe variind între 8 MHz și 15 MHz.

Undele ultrasonore se propagă în țesuturi și sunt parțial reflectate. Sonda plasată într-un punct de pe piele primește ecourile reflectate de suprafețele de separație dintre țesuturi. Cunoscând durata întoarcerii ecoului, amplitudinea acestuia și viteza lui de propagare, se deduc informații asupra naturii și grosimii țesuturilor traversate. Aceste informații sunt transmise unui computer care le prelucrează și furnizează o imagine de sinteză a organelor sondate.

Ecografia permite o diagnosticare mai precisă în numeroase domenii ale medicinei. În *cardiologie*, ecografia 2D permite evaluarea caracteristicilor dimensionale ale inimii în funcționare: diastola și sistola (fig. 1.155), iar ecografia T. M. (timp-mișcare) permite studiul mișcărilor ventriculare și diagnosticarea anomaliilor valvelor.

Fig. 1.155

În *oftalmologie*, ultrasunetele sunt utilizate pentru operarea cataractei (opacizarea cristalinului) prin phakoemulsificare (tehnica Kelman). Cristalinul distrus de ultrasunete este aspirat și înlocuit imediat cu un implant suplu.

În *estetica medicală*, ultrasunetele cu frecvența de 1 MHz permit tratarea unor degradări ale pielii prin stimularea circulației și a metabolismelor celulare, creșterea secreției de colagen și elastină a pielii.

Infrasunetele sunt sunete de joasă frecvență sub pragul minim la care urechea umană poate percepe. Cercetătorii au stabilit că multe animale printre care elefanții și girafele comunică prin infrasunete pe care nu numai că le percep dar le și emit. În condiții atmosferice ideale, elefanții comunică pe distanțe de zeci de kilometri prin infrasunete care se reflectă datorită fenomenului de inversiune termică de Pământ în loc să se disperseze în aer. Ei pot aprecia atât direcția cât și distanța la care se află individul grupului care a produs infrasunetul prin aprecierea diferenței de timp dintre momentul în care sunetul a ajuns prin sol și momentul în care a ajuns prin aer.

Se pare că gâtul lung îi permite girafei sp producă sunete sub pragul frecvenței minime, percepute de om (15-20 Hz). Surprinzătoare este intensitatea infrasunetelor produse de girafă de circa 80 dB.

Exploziile nucleare sau cu exploziv convențional, erupțiile vulcanice, tornadele, uraganele, cutremurele de pământ sunt cele mai puternice generatoare de infrasunete.

Efectele fiziologice și psihice nocive ale infrasunetelor ca însoțesc catastrofele naturale sau exploziile sunt datorate rezonanțelor cu frecvențele organelor interne ale omului dar și presiunii extrem de mari a aerului antrenat de infrasunete. Manifestările lor sunt: senzația de durere, amețeală, diminuarea facultăților intelectuale, greutăți în respirație sau chiar moartea. Experimente recente încearcă să utilizeze generatoare tubulare de infrasunete pentru tehnica militară.

Exercițiu aplicativ

Enunț: Viteza de propagare a ultrasunetelor nu este aceeași într-un fluid în repaus sau într-unul în mișcare. Fie v viteza lor de propagare în fluidul aflat în repaus și fie u viteza de curgere a fluidului. Într-o canalizare parcursă de acest fluid se așază un emițător E și un receptor R la distanța L unul de celălalt (fig. 1.156). Emițătorul E emite un semnal scurt. Fluidul curge de la E spre R. Un osciloscop permite măsurarea timpului t_1 de propagare a semnalului. Se permută apoi rolurile lui R și E; un semnal emis de R este primit de E. Osciloscopul permite măsurarea duratei t_2 de propagare a acestui semnal.

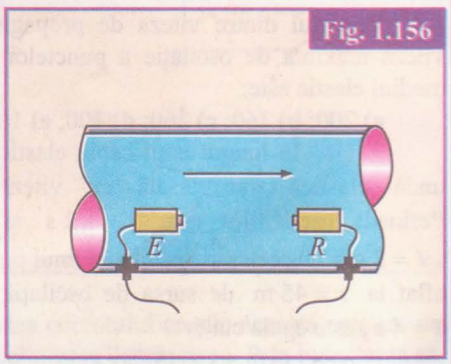


Fig. 1.156

a) Exprimați duratele t_1 și t_2 în funcție de L, v și u.

b) Exprimați diferența τ între t_1 și t_2.

c) Calculați viteza de curgere a fluidului, u, pentru $L = 1{,}5$ m, $v = 1500$ m/s și $\tau = 4$ μs.

Soluție: a) Când semnalul se propagă în sensul de curgere a fluidului:

$$t_1 = \frac{L}{v+u}$$

Când el se propagă în sens contrar:

$$t_2 = \frac{L}{v-u}$$

b) Rezultă $\tau = t_2 - t_1 = 2L\dfrac{u}{v^2-u^2}$

c) Cum $u \ll v$ putem aproxima: $\tau \approx \dfrac{2Lu}{v^2}$

De aici

$$u \approx \frac{\tau v^2}{2L} = \frac{1500^2 \cdot 4 \cdot 10^{-6}}{2 \cdot 1{,}5}\frac{\text{m}}{\text{s}} \approx 3\ \text{ms}^{-1}$$

Constatăm că într-adevăr viteza de curgere a fluidului, u, este neglijabilă față de viteza de propagare a ultrasunetelor, v.

Test sumativ – Unde mecanice

1. (1p) O undă longitudinală se propagă într-un mediu elastic de densitate $\rho = 2600\ \text{kg/m}^3$ după legea

$$y = 1{,}2\sin\left(1000\pi t - \frac{2\pi}{\upsilon}x\right)\ (\text{cm})$$

Diferența de fază dintre două puncte aflate pe abscisă, la distanța $\Delta x = 3{,}2$ m, este $\Delta\varphi = \dfrac{4}{5}\pi$ rad.

Modulul de elasticitate al mediului elastic prin care se propagă unda este:

a) $3{,}16 \cdot 10^6\ \text{N/m}^2$;

b) $41{,}6 \cdot 10^6\ \text{N/m}^2$;

c) $9{,}8 \cdot 10^6\ \text{N/m}^2$;

d) $2 \cdot 10^6\ \text{N/m}^2$;

e) $5{,}6 \cdot 10^6\ \text{N/m}^2$.

2. (1p) Printr-un mediu elastic se propagă o undă plană conform ecuației:

$$y = 0{,}02\sin(120\pi t - 0{,}025x)\ (\text{m})$$

Raportul dintre viteza de propagare a undei și viteza maximă de oscilație a punctelor materiale din mediul elastic este:

a) 200; **b)** 160; **c)** 260; **d)** 100; **e)** 10.

3. (1p) În lungul unui cablu elastic se propagă o undă elastică transversală cu viteza $v = 15$ m/s. Perioada oscilațiilor este $T = 1{,}2$ s și amplitudinea $\mathcal{A} = 2$ cm. Accelerația oscilației unui punct al cablului aflat la $x = 45$ m de sursa de oscilații, la momentul $t = 4$ s, este egală cu:

a) 0,27 m/s^2; **b)** 0,12 m/s^2; **c)** 0,39 m/s^2;

d) 0,47 m/s^2; **e)** 0,6 m/s^2.

4. (2p) O undă elastică longitudinală cu frecvența $\upsilon = 1000$ Hz se propagă printr-un mediu elastic cu densitatea $\rho = 9000\ \text{kg/m}^3$ și modul de elasticitate $E = 1{,}44 \cdot 10^9\ \text{N/m}^2$.

Distanța dintre două puncte ale mediului elastic între care diferența de fază este $\Delta\varphi = \pi$ este egală cu:

a) 0,3 m; **b)** 0,1 m; **c)** 0,2 m;

d) 0,5 m; **e)** 0,6 m.

5. (2p) La capătul A al ramurii unui diapazon se leagă un fir de lungime $l = 2$ m și de masă $m = 12$ g. La celălalt capăt al firului se suspendă un corp de masă $m_1 = 960$ g. Se produc oscilații ale diapazonului. În firul AB apar unde staționare, punctele A și B fiind noduri. Care este frecvența oscilațiilor diapazonului dacă pe fir s-au format 10 ventre?

a) 100 Hz; **b)** 50 Hz; **c)** 40 Hz;

d) 10 Hz; **e)** 75 Hz.

6. (2p) Un automobil se deplasează cu viteza $v = 108$ km/h. Claxonul automobilului emite un sunet de frecvență $\upsilon_0 = 300$ Hz. Care este diferența frecvențelor percepute de doi observatori aflați în repaus pe șosea, în fața și respectiv în spatele automobilului? ($c = 330$ m/s)

a) 50 Hz; **b)** 55 Hz; **c)** 60 Hz;

d) 5 Hz; **e)** 100 Hz.

Oficiu: 1p

Total: 10p

Răspuns: **1.** b; **2.** a; **3.** d; **4.** c; **5.** a; **6.** b

Capitolul II

OSCILAȚII ȘI UNDE ELECTROMAGNETICE

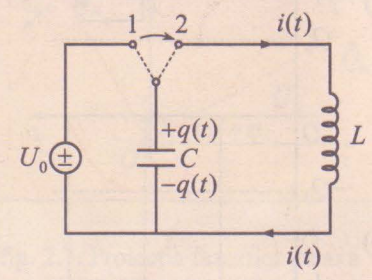
2.1. OSCILAȚII ELECTROMAGNETICE LIBERE

2.1.1. Descărcarea unui condensator (C) printr-o bobină ideală (L)

Vom arăta în cele ce urmează că procesul de descărcare a unui condensator printr-o bobină generează oscilații ale tensiunii, ale sarcinii de pe armăturile condensatorului și respectiv ale intensității curentului ce parcurge circuitul de descărcare.

Imaginați-vă montajul din fig. 2.1, alcătuit din elemente ideale de circuit. Condensatorul de capacitate C se încarcă inițial de la un generator de tensiune U_0 cu sarcina $Q_0 = CU_0$.

Fig. 2.1



Prin comutarea contactului din poziția 1 în poziția 2, condensatorul este pus să se descarce prin *bobina ideală* de inductanță pură L (presupunem că rezistența electrică a înfășurărilor acesteia este neglijabilă).

Fie $\pm q(t)$ sarcinile de pe armăturile condensatorului la momentul t al descărcării și $i(t)$ valoarea instantanee a intensității curentului prin bobină.

Condițiile inițiale ale descărcării vor fi:

$$\text{C.I.}\begin{cases} t_0 = 0 \\ q_{(0)} = Q_0 = CU_0 \\ i_{(0)} = i_0 = 0 \end{cases} \qquad (1)$$

Prin definiție, intensitatea curentului electric este sarcina electrică ce traversează orice secțiune a circuitului în unitatea de timp, la un moment dat:

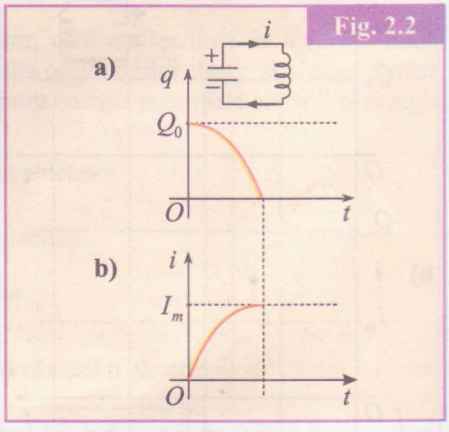
$$i = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta q}{\Delta t} = \frac{dq}{dt} \qquad (2)$$

ceea ce reprezintă derivata sarcinii electrice momentane $q(t)$ în raport cu timpul.

Curentul electric ce traversează bobina ideală generează un câmp magnetic variabil, al cărui flux magnetic prin suprafața spirelor acesteia, numit *flux propriu*, depinde liniar de intensitatea curentului electric:

$$\Phi_{(t)} = L \cdot i(t) \qquad (3)$$

Fig. 2.2



La bornele bobinei ia naștere o *t.e.m. de autoinducție* e_a proporțională, conform legii lui Faraday, cu viteza de variație a fluxului magnetic inductor, aici, fluxul propriu:

$$e_a = -\frac{d\Phi}{dt} \qquad (4)$$

Din (3) și (4) rezultă că:

$$e_a = -L\frac{di}{dt} \qquad (5)$$

T.e.m. autoindusă este proporțională cu viteza de variație a intensității curentului electric și de sens contrar acesteia. Datorită ei, bobina întârzie scăderea și prelungește creșterea intensității curentului.

Pe măsură ce sarcina de pe armăturile condensatorului scade, intensitatea curentului crește; această creștere nu este bruscă, deoarece tensiunea autoindusă în bobină și curentul autoindus prelungesc descărcarea. Prin inductanța sa, bobina manifestă inerție la variațiile curentului. Când sarcina de pe armături s-a anulat, intensitatea curentului a devenit maximă (fig. 2.2 a și b) și curentul continuă să circule, datorită inerției inductanței, în același sens,

Fig. 2.3

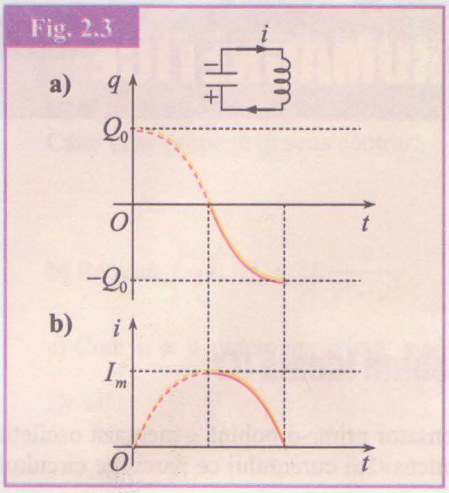


Fig. 2.4

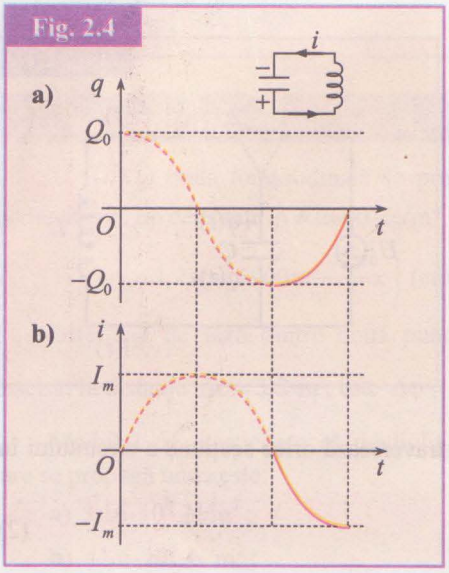
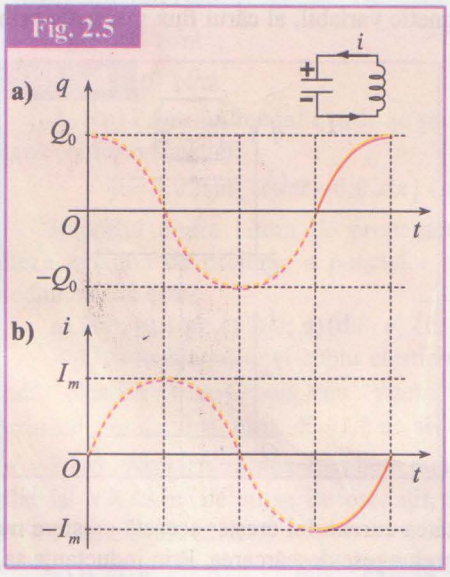


Fig. 2.5



reîncărcând condensatorul cu sarcini de semn contrar. De pe placa încărcată negativ în etapa anterioară, acum neutră, pleacă în continuare electroni. Curentul circulă în același sens, dar, în acest timp, intensitatea lui scade; t.e.m. indusă tinde să se opună acestei scăderi, prelungind-o (fig. 2.3 a și b).

Curentul se anulează în momentul când sarcina de pe armătura superioară a devenit $-Q_0$ (și $+Q_0$ pe cea inferioară).

Condensatorul reîncărcat se va descărca prin bobină. Curentul electric va avea acum sens contrar. Bobina va prelungi descărcarea. În momentul anulării sarcinii electrice, intensitatea curentului devine maximă, dar de sens opus, $-I_m$ (fig. 2.4 a și b). Deși condensatorul e descărcat, curentul continuă să circule reîncărcându-l cu o sarcină pozitivă pe armătura superioară și negativă pe cea inferioară. În acest interval de timp curentul scade în valoare absolută, păstrându-și sensul negativ, până la anulare (fig. 2.5 a și b). Se revine la starea inițială, după încheierea unui ciclu de evoluție. Acesta se repetă periodic, generând oscilații concomitente ale sarcinii condensatorului și respectiv ale intensității curentului. Simultan, oscilează și valoarea tensiunii la bornele condensatorului:

$$u_c(t) = \frac{q(t)}{C} \tag{6}$$

Vom demonstra că oscilațiile generate de circuitul ideal LC (bobină-condensator) sunt de tip armonic, sinusoidal, analoage oscilațiilor mecanice libere fără frecare, liniar armonice.

Scriem legea lui Ohm pentru circuitul LC, valabilă pentru orice moment de timp t:

$$e_a(t) = u_c(t) \tag{7}$$

Utilizând (5) și (6), relația (7) devine:

$$-L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} = \frac{q}{C}$$

sau încă:

$$\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} = -\frac{1}{LC}\cdot q \tag{8}$$

Ecuația (8) este perfect analoagă, ca formă matematică, ecuației ce descrie oscilatorul mecanic liniar-armonic:

$$a = -\omega^2 x \tag{9}$$

Urmăriți analogia dintre mărimile oscilatorii mecanice și respectiv cele electrice din tabelul de mai jos.

Mărimi mecanice		**Mărimi electrice**
elongația $x(t)$	$\leftrightarrow$	$q(t)$ sarcina instantanee pe condensator
viteza $v(t) = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$	$\leftrightarrow$	$i(t) = \frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t}$ intensitatea curentului
$a(t) = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}$ accelerația	$\leftrightarrow$	$\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}$ viteza de variație a intensității curentului

În baza acestei analogii putem afirma că oscilațiile electrice generate în circuitul ideal LC au pulsația dată de relația:

$$\omega^2 = \frac{1}{LC} \tag{10}$$

iar perioada:

$$T = 2\pi\sqrt{LC} \tag{11}$$

și sunt descrise de funcții sinusoidale.

Soluția ecuației (9) fiind:

$$x(t) = \mathcal{A}\sin(\omega t + \varphi) \tag{12}$$

vom putea exprima sarcina instantanee de pe condensator prin analogie:

$$q(t) = Q_m \sin(\omega t + \varphi) \tag{13}$$

unde amplitudinea Q_m şi faza iniţială φ a oscilaţiei se determină din condiţiile iniţiale.

Tensiunea oscilează de asemenea sinusoidal:

$$u(t) = \frac{q(t)}{C} = U_m \sin(\omega t + \varphi) \tag{14}$$

cu amplitudinea

$$U_m = Q_m / C \tag{15}$$

Intensitatea instantanee a curentului se va exprima, în mod analog vitezei oscilatorului mecanic, prin funcţia:

$$i(t) = I_m \cdot \cos(\omega t + \varphi) \tag{16}$$

unde amplitudinea intensităţii curentului:

$$I_m = Q_m \omega \tag{17}$$

Curentul electric generat în circuitul LC este un *curent alternativ sinusoidal* al cărui sens se schimbă de două ori într-o perioadă.

Aţi studiat în clasa a X-a mărimile caracteristice ale unei tensiuni şi ale unui curent alternative. Reamintiţi-le!

Tot în clasa a X-a aţi studiat despre generarea tensiunii şi curentului alternative prin fenomenul de inducţie electromagnetică într-o spiră ce se roteşte uniform într-un câmp magnetic omogen.

Deşi principiul generării este altul în cazul circuitului oscilant LC, caracteristicile mărimilor sinusoidale nu se modifică.

Veţi observa că în cazul circuitului LC, intensitatea curentului este defazată cu $\pi/2$ (un sfert de perioadă) înaintea tensiunii, ceea ce se remarcă şi din reprezentarea grafică a celor două funcţii (fig. 2.6).

Fig. 2.6

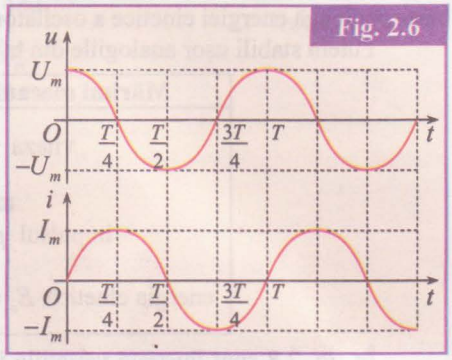
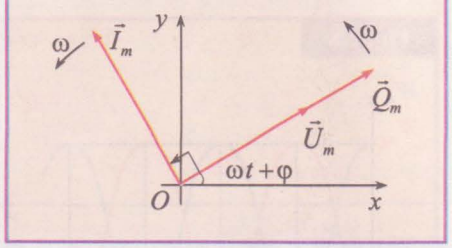


Fig. 2.7



Reprezentarea fazorială a oscilaţiilor tensiunii şi curentului este redată în fig. 2.7. Proiecţia fazorilor pe axa Oy, la orice moment de timp, oferă valorile instantanee ale tensiunii şi respectiv intensităţii curentului.

Bilanţul energetic

În condensatorul de capacitate C, câmpul electric omogen şi uniform este presupus a fi concentrat numai în spaţiul dintre armături. Intensitatea sa variază sinusoidal în timp.

Energia câmpului electric:

$$W_{el(t)} = \frac{Cu_{(t)}^2}{2} = \frac{q_{(t)}^2}{2C} \tag{18}$$

este datorată stării de încărcare a condensatorului.

„Elasticitatea" sistemului oscilant electric este conferită de condensator, care are tendinţa de a reveni întotdeauna la starea de neutralitate electrică. Pornind de la analogia dintre elongaţia oscilatorului elastic şi sarcină, putem stabili analogia dintre forţa elastică şi tensiunea electrică, precum şi pe cea dintre energia potenţială elastică şi energia electrostatică. Vom completa astfel tabloul analogiilor.

Mărimi mecanice		**Mărimi electrice**
x	$\leftrightarrow$	q
constanta de elasticitate k	$\leftrightarrow$	$1/C$ inversul capacităţii
forţa elastică $F_e = -kx$	$\leftrightarrow$	$u_c = \frac{q}{C}$ tensiunea
energia potenţială $E_p = k\frac{x^2}{2}$	$\leftrightarrow$	$W_{el} = \frac{q^2}{2C}$ energia câmpului electric

În ceea ce priveşte „dinamica" bobinei, ea se manifestă ca inerţie a sistemului, inductanţa proprie L fiind analoagă masei oscilatorului mecanic. Câmpul magnetic presupus concentrat în interiorul bobinei ideale, este omogen şi uniform. Inducţia sa magnetică variază sinusoidal în timp, în fază cu intensitatea curentului:

$$B(t) = \mu_0 \frac{Ni(t)}{l}$$

Energia câmpului magnetic (a cărei expresie ați studiat-o în clasa a X-a):

$$W_{mg(t)} = \frac{Li^2(t)}{2}$$

este analoagă energiei cinetice a oscilatorului mecanic.

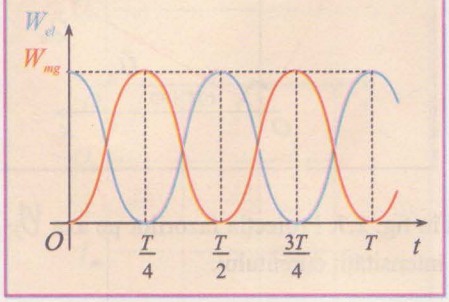
Putem stabili ușor analogiile din tabelul de mai jos.

Mărimi mecanice		Mărimi electrice
viteza $v = \frac{dx}{dt}$	$\leftrightarrow$	$i = \frac{dq}{dt}$ intensitatea
masa m	$\leftrightarrow$	L inductanța
impulsul $p = mv$	$\leftrightarrow$	$\Phi = Li$ fluxul propriu
energia cinetică $E_c = \frac{mv^2}{2}$	$\leftrightarrow$	$W_{mg} = \frac{Li^2}{2}$ energia câmpului magnetic

În fig. 2.8 sunt ilustrate variațiile în raport cu timpul ale energiilor câmpului magnetic și câmpului electric, în timpul oscilațiilor.

În timpul descărcării condensatorului, energia câmpului electric scade, în schimb se acumulează energie în câmpul magnetic al bobinei. Anularea sarcinii corespunde unui maxim al energiei câmpului magnetic:

Fig. 2.8



$$W_{mg_{max}} = \frac{LI_m^2}{2} \tag{19}$$

Scăderea intensității curentului și implicit a energiei magnetice este corelată cu o creștere a energiei câmpului electric. Aceasta devine maximă:

$$W_{el_{max}} = \frac{Q_m^2}{2C} = \frac{CU_m^2}{2} \tag{20}$$

în momentul anulării curentului.

Perioada variațiilor energiei câmpului electric, respectiv magnetic este jumătate din perioada oscilațiilor tensiunii, respectiv intensității curentului.

Arătați că amplitudinile energiilor sunt egale:

$$W_{el_{max}} = W_{mg_{max}} = \frac{LI_m^2}{2} = \frac{Q_m^2}{2C} \tag{21}$$

În timpul oscilațiilor are loc un balans al energiei între câmpul electric și cel magnetic, prin transfer energetic între condensatorul și bobina ideale, astfel încât în orice moment energia totală să păstreze o valoare constantă:

$$W = W_{el(t)} + W_{mg(t)} =$$

$$= \frac{Q_m^2}{2C}\sin^2(\omega t + \varphi) + \frac{LI_m^2}{2}\cos^2(\omega t + \varphi) =$$

$$= \frac{LI_m^2}{2}\left[\sin^2(\omega t + \varphi) + \cos^2(\omega t + \varphi)\right] =$$

$$= \frac{LI_m^2}{2} = \frac{Q_m^2}{2C} = \text{const.}$$

Spunem că *energia totală a circuitului oscilant ideal LC se conservă.*

Exercițiu aplicativ

Enunț: Un condensator de capacitate $C = 2{,}2\ \mu F$ este încărcat sub o tensiune $U = 24\ V$. El se descarcă apoi printr-o bobină de inductanță $L = 28\ mH$ de rezistență neglijabilă.

a) Calculați frecvența oscilațiilor electrice.

b) Calculați amplitudinea I_m a intensității curentului.

c) Exprimați variația în timp a tensiunii $u(t)$ la bornele condensatorului și a intensității curentului $i(t)$.

d) Calculați primul moment de timp de la începerea oscilațiilor în care energia câmpului electric devine egală cu cea a câmpului magnetic.

Soluție: a) Frecvența oscilațiilor:

$$\upsilon = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}} = \frac{1}{6{,}28\cdot\sqrt{2{,}2\cdot10^{-6}\cdot28\cdot10^{-3}}}\ \text{s}^{-1} = \frac{10^4}{6{,}28\cdot2{,}482}\ \text{s}^{-1} = 641{,}6\ \text{Hz}$$

b) Amplitudinile energiilor electrică și magnetică sunt egale: $\frac{CU_m^2}{2} = \frac{LI_m^2}{2}$

Rezultă: $I_m = U_m\sqrt{\frac{C}{L}} = U\sqrt{\frac{C}{L}} = 24\sqrt{\frac{2{,}2\cdot10^{-6}}{28\cdot10^{-3}}} = 0{,}213\ \text{A}$

c) La momentul inițial $t_0 = 0$, $u_{(0)} = U$, $i_{(0)} = 0$, .

Găsim: $\begin{cases} U = U_m \sin\varphi \\ 0 = I_m \cos\varphi \end{cases}$ și de aici $\varphi = \frac{\pi}{2}$, iar $U_m = U$

Pulsația oscilațiilor este $\omega = 2\pi\upsilon = 4025\ \text{s}^{-1}$

Obținem

$$u(t) = 24\cos 4025t\ \text{(V)}$$

și

$$i(t) = -0{,}213\sin 4025t\ \text{(A)}$$

d) Condiția problemei: $W_{el(t)} = W_{mg(t)}$ ne conduce la:

$$\sin^2 4025t = \cos^2 4025t$$

de unde:

$$\text{tg}\,4025t = 1,\ t = \frac{\pi}{4\cdot4025}\ \text{s} = 195\ \mu\text{s}$$

Test de verificare rapidă

Alegeți răspunsul corect:

1. Perioada unui circuit (L, C) este dată de relația:

a) $T = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}$;

b) $T = 2\pi\sqrt{LC}$;

c) $T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{C}}$.

2. Perioada unui circuit oscilant (L, C) este egală cu perioada variației:

a) energiei condensatorului;

b) sarcinii condensatorului;

c) intensității curentului;

d) energiei bobinei.

3. Capacitatea condensatorului unui circuit oscilant cu frecvența proprie de 1 MHz este $C = 0{,}2$ nF. Calculați valoarea inductanței bobinei.

4. În fig. 2.9 este reprezentată oscilograma tensiunii la bornele condensatorului unui circuit oscilant (L, C) de rezistență neglijabilă. Se cunosc $C = 6{,}9$ μF, sensibilitatea verticală 2 V/div. și durata baleiajului 1 ms/div.

Calculați:

a) perioada oscilațiilor;

b) inductanța bobinei;

c) energia circuitului oscilant;

d) valoarea maximă a intensității curentului în circuit.

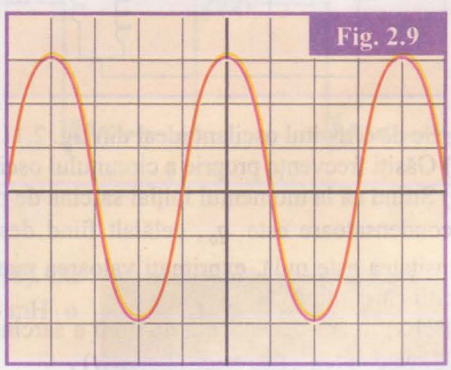


Fig. 2.9

5. Un oscilator electric este constituit dintr-o bobină de inductanță $L = 0{,}1$ H și rezistență neglijabilă și un condensator de capacitate $C = 10$ μF.

a) Calculați pulsația și perioada oscilatorului.

b) Exprimați variația sarcinii de pe armăturile condensatorului în funcție de timp, $q(t)$, dacă la momentul inițial $t_0 = 0$ condensatorul este încărcat sub tensiunea $U = 10$ V și intensitatea curentului este nulă.

c) Aceeași întrebare dacă la momentul inițial condensatorul este descărcat, dar curentul are intensitatea de 0,4 A.

Exerciții și probleme propuse

1. Un circuit oscilant conține o bobină ideală de inductanță $L = 0{,}1$ H alcătuită din $N = 5000$ de spire de arie $S = 10^{-4}$ m^2 fiecare și un condensator plan cu aer de capacitate $C = 10$ μF și cu distanța dintre armături $d = 5$ mm. La momentul inițial, curentul prin circuit are intensitatea $i_0 = 100$ mA, iar condensatorul este descărcat.

a) Calculați perioada proprie a oscilațiilor circuitului.

b) Exprimați intensitatea curentului $i(t)$ și tensiunea instantanee $u(t)$ la bornele fiecărui element de circuit.

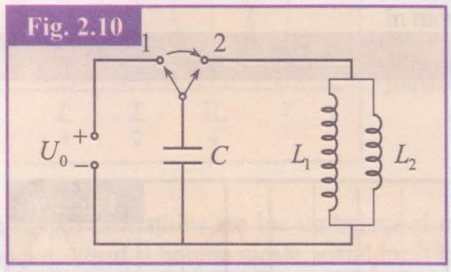
c) Stabiliți dependența de timp a intensității câmpului electric $E(t)$ din condensator și a inducției câmpului magnetic $B(t)$ din bobină. Reprezentați-le fazorial.

2. Un condensator cu capacitatea C se descarcă prin două bobine ideale de inductanțe L_1 și respectiv L_2, legate în paralel (fig. 2.10). Se cunoaște amplitudinea intensității curentului prin prima bobină, I_{m1}. Exprimați:

a) perioada oscilațiilor;

b) tensiunea sub care a fost încărcat inițial condensatorul.

Fig. 2.10



3. Se dă circuitul oscilant ideal din fig. 2.11.

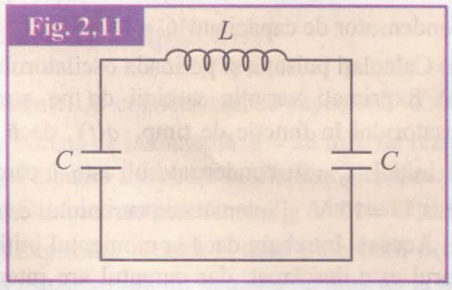
a) Găsiți frecvența proprie a circuitului oscilant.

b) Știind că la momentul inițial sarcina de pe unul dintre condensatoare este q_0, celălalt fiind descărcat, iar intensitatea este nulă, exprimați valoarea maximă a intensității curentului.

c)* Exprimați dependența de timp a sarcinilor de pe cele două condensatoare: $q_1(t)$ și $q_2(t)$.

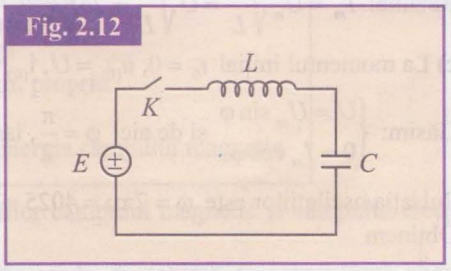
d)* Găsiți un sistem mecanic oscilant analog circuitului din fig. 2.11.

Fig. 2.11



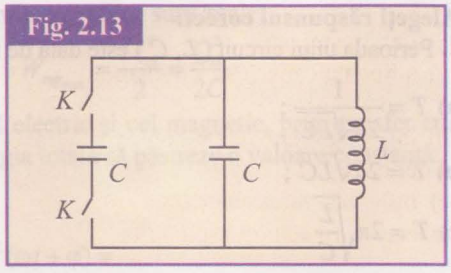
4. Un generator electric de tensiune electromotoare continuă E este legat în serie cu o bobină ideală de inductanță L și un condensator de capacitate C, ca în fig. 2.12. Deduceți expresiile intensității curentului și a tensiunii la bornele condensatorului ca funcții de timp. Momentul inițial coincide cu închiderea întrerupătorului K.

Fig. 2.12



5. Se dă circuitul oscilant din fig. 2.13, în care se cunosc capacitățile C ale celor două condensatoare identice și inductanța L a bobinei ideale. Inițial, comutatorul dublu este închis; intensitatea curentului prin bobină în cursul oscilațiilor libere este descrisă de ecuația: $i(t) = I_m \cos \omega t$, unde I_m este cunoscut. La momentul $t = \frac{T}{4}$, comutatorul dublu se deschide. Scrieți ecuația intensității curentului prin circuit începând din acest moment.

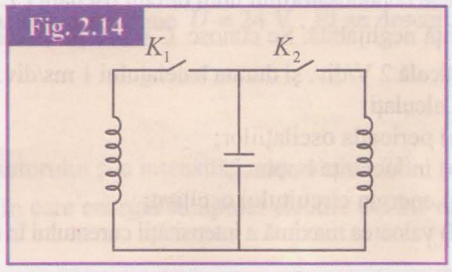
Fig. 2.13



6.* Se consideră circuitul oscilant din fig. 2.14, unde inductanța bobinelor identice ideale este L, iar capacitatea condensatorului, C. La momentul inițial, ambele întrerupătoare sunt deschise, iar condensatorul este încărcat complet sub tensiunea U_0. Se închide întrerupătorul K_1 și, când tensiunea pe condensator devine nulă, se închide și întrerupătorul K_2.

Determinați tensiunea maximă pe condensator după închiderea lui K_2.

Fig. 2.14



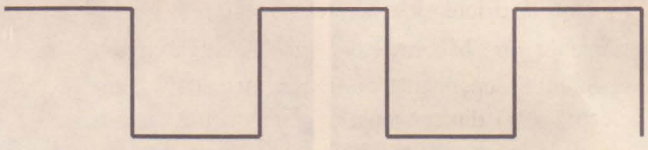
2.1.2. Descărcarea unui condensator (C) printr-o bobină reală (L, r)

În realitate, orice bobină caracterizată prin inductanța proprie L posedă și o rezistență electrică, r. Descărcarea unui condensator de capacitate C printr-o bobină reală (L, r) generează oscilații libere amortizate ale sarcinii de pe armăturile condensatorului și respectiv ale intensității curentului din circuit. Pentru observarea acestora realizăm următorul experiment:

EXPERIMENT

Se utilizează un generator de joasă frecvență ce produce la mersul în gol un semnal dreptunghiular (fig. 2.15).

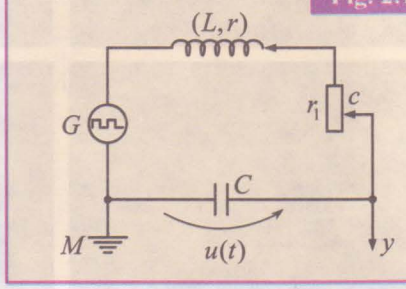
Fig. 2.15



Acesta poate fi vizualizat direct pe ecranul osciloscopului și constă în deschideri și întreruperi bruște ale tensiunii de alimentare.

Generatorul alimentează circuitul oscilant din fig. 2.16, alcătuit dintr-un condensator de capacitate C ($0{,}1\ \mu F$ sau $0{,}22\ \mu F$) și o bobină de inductanță L (13 mH sau 4,7 mH) și rezistență r. În circuit se montează în serie și un reostat ($4{,}7\ k\Omega$). Notăm prin R rezistența totală a circuitului serie.

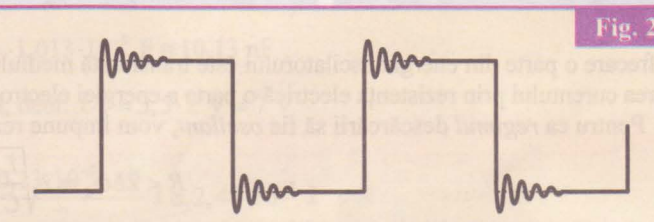
Fig. 2.16



Fiecare variație a tensiunii dreptunghiulare aplicate (stabiliri/întreruperi bruște) determină oscilații libere amortizate ale circuitului (R, L, C). Oscilațiile tensiunii la bornele condensatorului pot fi observate pe ecranul osciloscopului, conectat între bornele acestuia (fig. 2.17).

Pentru măsurarea perioadei lor proprii se impune reglarea bazei de timp a osciloscopului.

Fig. 2.17



Se urmărește:

a) influența capacității condensatorului asupra perioadei proprii;

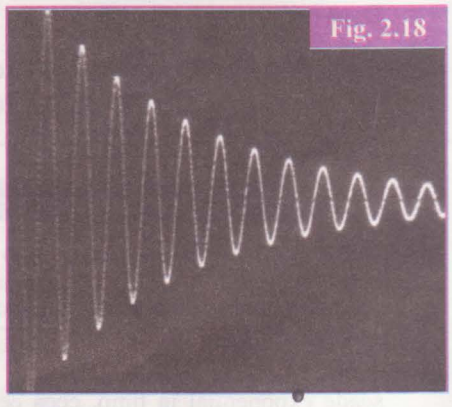
b) influența inductanței bobinei asupra acestei perioade;

c) influența rezistenței totale R a circuitului asupra aspectului oscilațiilor.

Valorificarea observațiilor

Observăm că amplitudinea oscilațiilor descrește în timp (fig. 2.18). Cu un baleiaj de 50 μs/div., determinăm pentru $C = 0{,}1\ \mu F$ și $L = 13$ mH o perioadă a oscilațiilor $T = 2{,}2 \cdot 10^{-4}$ s.

Fig. 2.18



a) Modificăm capacitatea condensatorului păstrând constantă valoarea inductanței. Datele experimentale sunt indicate în tabelul:

C (μF)	0,1	0,22	0,32
T (s)	$2{,}2 \cdot 10^{-4}$	$3{,}2 \cdot 10^{-4}$	$3{,}9 \cdot 10^{-4}$
$T/\sqrt{C}$	687	660	667

Puteți verifica proporționalitatea perioadei proprii cu rădăcina pătrată a capacității: $T \sim \sqrt{C}$.

b) Menținem capacitatea $C = 0{,}1\ \mu F$ și înlocuim bobina de inductanță $L = 13$ mH cu una de inductanță $L = 4{,}7$ mH. Perioada se modifică de la $2{,}2 \cdot 10^{-4}$ s la $1{,}4 \cdot 10^{-4}$ s. Verificăm astfel că perioada proprie este proporțională cu rădăcina pătrată a inductanței bobinei: $T \sim \sqrt{L}$

c) Creştem acum treptat rezistenţa circuitului prin deplasarea cursorului reostatului. Observaţi că amortizarea devine din ce în ce mai rapidă (fig. 2.19 a şi b).

Oscilaţiile dispar pentru o anumită valoare a rezistenţei circuitului, numită rezistenţă critică, R_c (fig. 2.19.c). Pentru valori mai mari ale rezistenţei circuitului decât R_c, descărcarea este aperiodică (fig. 2.19.d).

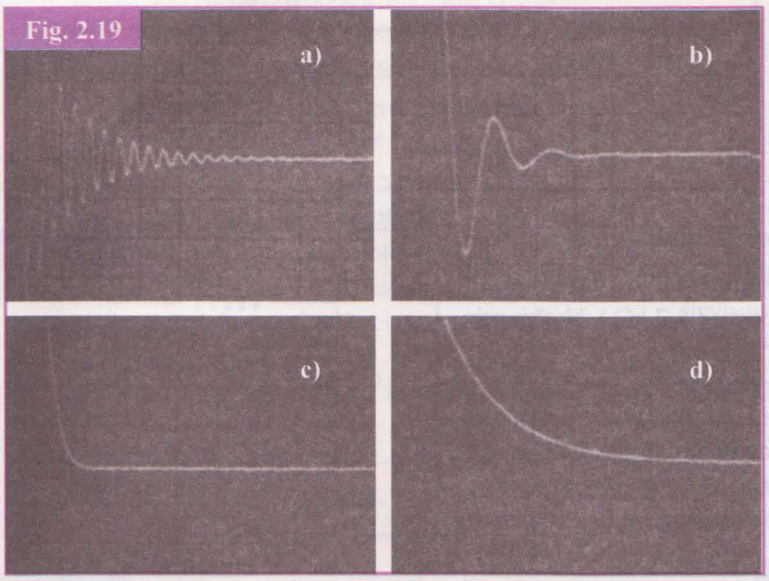
În concluzie, cauza **amortizării oscilaţiilor este rezistenţa circuitului.**

Ecuaţia ce descrie fenomenul se obţine din aplicarea legii lui Ohm circuitului:

$$e_a = u_R + u_c \tag{1}$$

unde $u_R = Ri$ este căderea de tensiune pe elementul rezistiv al circuitului (rezistenţa sa totală R, rezultată prin înserierea generatorului de semnal, a bobinei reale şi a reostatului).

Fig. 2.19



Rezultă ecuaţia:

$$L + \frac{di}{dt} + Ri + \frac{q}{C} = 0 \tag{2}$$

analoagă ecuaţiei ce descrie oscilaţiile mecanice libere cu frecare fluidă (studiate în capitolul 1):

$$ma + Cv + kx = 0 \tag{3}$$

unde C reprezintă coeficientul de frecare la înaintarea oscilatorului în fluidul vâscos.

După cum vă reamintiţi, oscilaţiile se produc numai dacă frecarea este slabă, adică pentru:

$$C < 2m\omega_0 \tag{4}$$

unde $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$ reprezintă pulsaţia oscilatorului (elastic) în absenţa frecărilor.

Analogul coeficientului de frecare C pentru oscilaţiile electrice îl reprezintă rezistenţa electrică, R a circuitului; după cum prin frecare o parte din energia oscilatorului este transferată mediului sub formă de căldură, tot astfel, prin efect Joule, la trecerea curentului prin rezistenţa electrică o parte a energiei electromagnetice a circuitului este transferată mediului.

Pentru ca *regimul* descărcării să fie *oscilant*, vom impune rezistenţei valori mici, astfel încât:

$$R < 2L\omega_0 = 2\sqrt{\frac{L}{C}} \tag{5}$$

unde $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ reprezintă pulsaţia proprie a circuitului oscilant ideal (L, C) corespunzător.

Dacă rezistenţa circuitului: $R = R_C = 2\sqrt{\frac{L}{C}}$ (6)

descărcarea este numită critică (fig. 2.19.c), iar dacă

$$R > 2\sqrt{\frac{L}{C}} \tag{7}$$

regimul este aperiodic (fig. 2.19.d).

Tot prin analogie, stabilim că soluţia ecuaţiei (2) în regim de oscilaţii este:

$$q(t) = Q_0 e^{-\frac{R}{2L}t} \cdot \sin(\omega t + \varphi) \tag{8}$$

Amplitudinea sarcinii de pe condensator:

$$Q_m(t) = Q_0 e^{-\frac{R}{2L}t} \tag{9}$$

scade exponenţial în timp, ceea ce confirmă aspectul observat pe ecranul osciloscopului (fig. 2.18). Pulsaţia oscilaţiilor amortizate este inferioară pulsaţiei proprii ω_0 a circuitului ideal (L, C) corespunzător:

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \frac{R^2}{4L^2}} = \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}} \tag{10}$$

iar perioada oscilațiilor amortizate, mai mare decât perioada proprie a circuitului ideal corespunzător:

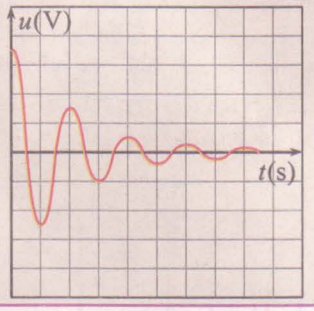
$$T > T_0 = 2\pi\sqrt{LC} \qquad (11)$$

Datele experimentale analizate anterior dovedesc o diferență de cca. 3% între perioada măsurată pe ecran ($T = 2{,}2 \cdot 10^{-4}$ s) și perioada oscilațiilor circuitului ideal ($T_0 = 2\pi\sqrt{LC} = 2{,}26 \cdot 10^{-4}$ s).

Exercițiu aplicativ

Enunț: Într-un circuit (R, L, C) serie se vizualizează pe ecranul osciloscopului tensiunea u în funcție de timp la bornele condensatorului în timpul descărcării acestuia în circuit (fig. 2.20).

Fig. 2.20



Sensibilitatea orizontală a osciloscopului este de 100 μs/div, iar cea verticală de 2 V/div.

a) Determinați perioada și frecvența oscilațiilor electrice amortizate.

b) Admițând că amortizarea nu modifică sensibil frecvența oscilațiilor, calculați capacitatea condensatorului, dacă inductanța bobinei este $L = 0{,}1$ H.

c) Calculați energia inițială a condensatorului.

d) Calculați energia disipată prin efect Joule în cursul primei oscilații.

Soluție: a) Pentru a mări precizia determinării perioadei, vom număra diviziunile orizontale corespunzătoare unui număr întreg de oscilații. Astfel, pentru 3 perioade găsim 6 diviziuni.

Rezultă: $T = \frac{1}{3} \cdot 6 \cdot 100\ \mu s = 200\ \mu s$.

Frecvența oscilațiilor va fi: $\nu = \frac{1}{T} = 500$ Hz

b) Dacă admitem că $T \approx T_0 = 2\pi\sqrt{LC}$, rezultă:

$$C \cong \frac{T^2}{4\pi^2 L} = \cdot 1{,}013 \cdot 10^{-8}\ \text{F} \cong 10{,}13\ \text{nF}$$

c) Inițial, tensiunea corespunde la 3,5 diviziuni, deci: $U_0 = 3{,}5 \cdot 2\ \text{V} = 7\ \text{V}$

Energia electrică inițială are valoarea:

$$W_{el_0} = \frac{CU_0^2}{2} = \frac{10{,}13 \cdot 10^{-9} \cdot 49}{2}\ \text{J} \cong 2{,}48 \cdot 10^{-7}\ \text{J}$$

d) La sfârșitul primei oscilații, tensiunea corespunde la 1,5 diviziuni, adică: $U_1 = 1{,}5 \cdot 2\ \text{V} = 3\ \text{V}$ deci energia electrică a devenit:

$$W_{el_1} = \frac{1}{2} CU_1^2 = 0{,}45 \cdot 10^{-7}\ \text{J}$$

Energia disipată prin efect Joule va fi:

$$W_J = W_{el_0} - W_{el_1} = (0{,}48 - 0{,}45) \cdot 10^{-7}\ \text{J} \cong 2{,}03 \cdot 10^{-7}\ \text{J}$$

Exerciții și probleme propuse

1. Indicați trei regimuri de variație în timp a intensității curentului dintr-un circuit oscilant (R, L, C). Reprezentați aspectul acestora.

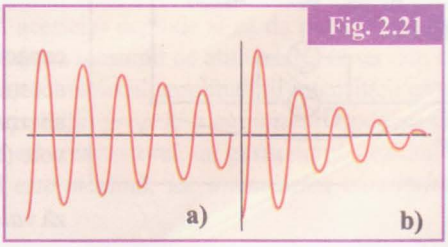
Cum poate fi modificat circuitul pentru a observa succesiv cele trei regimuri? Indicați mai multe procedee.

2. Curbele din fig. 2.21 reprezintă oscilații ale tensiunii la bornele condensatorului a două circuite oscilante (R, L, C) având aceeași inductanță.

a) Care dintre circuite, (a) sau (b), are rezistența mai mare? Justificați răspunsul.

b) Au cele două circuite aceeași capacitate? Justificați răspunsul.

Fig. 2.21



3. Un circuit (R, L, C) conține un condensator de capacitate $C = 1{,}8\ \mu F$ și o bobină de inductanță $L = 10\ mH$. Condensatorul este încărcat inițial sub o tensiune de 20 V.

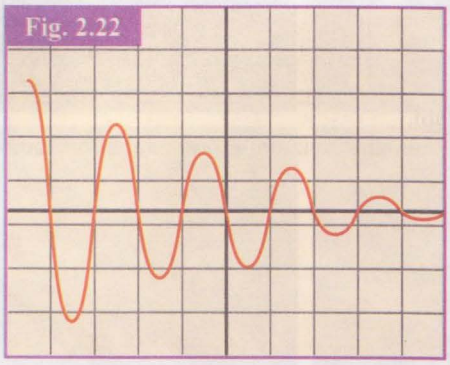
a) Calculați energia inițială furnizată circuitului.

b) După 100 de oscilații, energia electrică a scăzut cu 80%. Calculați sarcina maximă a condensatorului și intensitatea maximă a curentului după 100 de oscilații.

c) Calculați puterea medie disipată prin efect Joule în cursul primelor 100 oscilații.

4. Tensiunea la bornele condensatorului unui circuit oscilant (R, L, C) este vizualizată pe osciloscop (fig. 2.22). Baza de timp este 50 μs/div , iar sensibilitatea verticală 2 V/div.

Fig. 2.22



a) Verificați că raportul dintre două amplitudini succesive ale tensiunii este constant.

b)* Se definește decrementul logaritmic al descărcării ca logaritmul natural al raportului constant a două amplitudini succesive ale tensiunii oscilante:

$$\delta = \ln \frac{U_n}{U_{n+1}}$$

Exprimați decrementul logaritmic în funcție de R, L și C . Se consideră amortizarea slabă.

c) Se cunoaște valoarea inductanței, $L = 0{,}2\ H$. Calculați capacitatea C și rezistența R ale circuitului.

d) Calculați fracțiunea din energia inițială înmagazinată în condensator disipată prin efect Joule în decursul primelor patru perioade. Se consideră că $i = 0$ când tensiunea u_c este maximă.

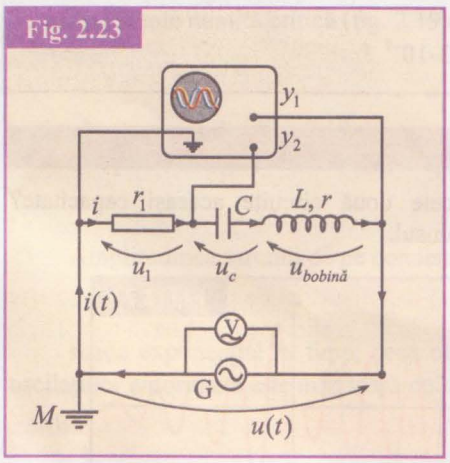
5. Trei condensatoare identice cu capacitatea $C = 5\ \mu F$ fiecare se încarcă de la o baterie apoi se conectează la bornele unei bobine cu rezistența $R = 2\ \Omega$ și inductanța $L = 0{,}02\ H$. De câte ori se modifică perioada oscilațiilor amortizate dacă, prima oară, condensatoarele sunt conectate în serie și a doua oară, în paralel?

6. Calculați rezistența unui circuit oscilant a cărui inductanță este $L = 1\ H$ dacă după $t = 0{,}1\ s$, valoarea amplitudinii tensiunii dintre armăturile condensatorului s-a micșorat de 4 ori.

2.2 CIRCUITUL R, L, C ÎN CURENT ALTERNATIV

2.2.1. Circuitul serie (R, L, C) în curent alternativ

Fig. 2.23



În paragraful precedent ați putut constata că oscilațiile libere ale unui circuit serie (R, L, C) se amortizează în timp. Pentru a menține constante amplitudinea tensiunii la bornele condensatorului și cea a intensității curentului, pierderile energetice datorate efectului Joule în rezistența activă a circuitului trebuie compensate prin aport energetic exterior.

Acest lucru se realizează conectând la bornele circuitului un generator de tensiune alternativă.

EXPERIMENT

Conectăm în serie un rezistor de rezistență r_1 , un condensator de capacitate C și o bobină de inductanță L și rezistență r . La bornele acestui circuit, un generator de joasă frecvență furnizează o tensiune alternativă sinusoidală de frecvență υ (pulsație $\omega = 2\pi\upsilon$) reglabilă după voie (fig. 2.23).

Un voltmetru conectat în paralel la bornele generatorului înregistrează *valoarea eficace* U constantă a acestei tensiuni.

Ştiţi din clasa a X-a că amplitudinea U_m a tensiunii se calculează prin relaţia:

$$U_m = U\sqrt{2} \tag{1}$$

Un osciloscop cu două spoturi va permite vizualizarea simultană a tensiunii:

$$u(t) = U\sqrt{2}\cdot \sin \omega t \tag{2}$$

impusă de generator şi a tensiunii $u_1(t)$ la bornele rezistorului r_1.

Cum:

$$u_1(t) = r_1 \cdot i(t) \tag{3}$$

al doilea semnal va fi proporţional şi în fază cu intensitatea curentului $i(t)$.

Pentru o pulsaţie ω a tensiunii de alimentare a generatorului, pe ecranul osciloscopului apar două sinusoide de *aceeaşi perioadă*, de *amplitudini constante*, *diferite* şi decalate (*defazate*) una în raport cu cealaltă (fig. 2.24).

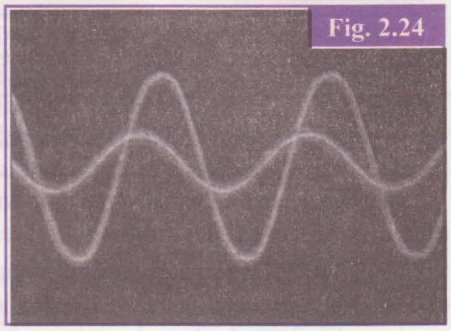


Fig. 2.24

Oricare ar fi frecvenţa generatorului, constatăm că *frecvenţa intensităţii curentului alternativ sinusoidal* din circuit *este aceeaşi cu frecvenţa impusă de generator*. Această frecvenţă este în general diferită de frecvenţa proprie $\upsilon_0 = \dfrac{1}{2\pi\sqrt{LC}}$ a circuitului oscilant (R, L, C). Circuitul este deci sediul unor **oscilaţii forţate**, impuse de generator.

Defazajul celor două sinusoide poate fi determinat cunoscând baza de timp a osciloscopului şi măsurând decalajul temporal τ dintre ele:

$$\varphi = 2\pi\frac{\tau}{T} \tag{4}$$

Modificând valoarea inductanţei L (prin introducerea unui miez de fier moale) sau a capacităţii C a condensatorului (condensator variabil) se poate modifica defazajul φ dintre curent şi tensiune.

Notând prin I valoarea eficace a intensităţii curentului, vom putea exprima valoarea sa instantanee în regim de oscilaţii forţate:

$$i(t) = I\sqrt{2}\sin(\omega t + \varphi) \tag{5}$$

unde ω este pulsaţia impusă de generator, iar φ defazajul dintre curent şi tensiune.

Experienţa arată că prin modificarea frecvenţei generatorului, valorile intensităţii eficace I şi a defazajului φ variază (fig. 2.25.a, b, c).

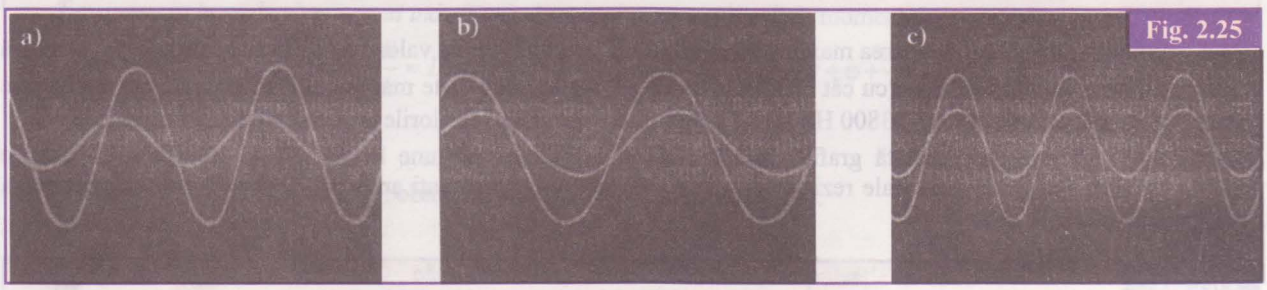


Fig. 2.25

Pentru valori ale pulsaţiei generatorului inferioare pulsaţiei proprii a circuitului, $\omega < \omega_0$, intensitatea este în avans de fază ($\varphi > 0$) faţă de tensiunea aplicată. Pentru pulsaţii ale generatorului superioare celei proprii, $\omega > \omega_0$, intensitatea este în întârziere faţă de tensiune ($\varphi < 0$). Doar pentru o pulsaţie a generatorului egală cu cea proprie a circuitului, $\omega = \omega_0$, curentul şi tensiunea sunt în fază.

Amplitudinea intensităţii curentului (ca şi valoarea eficace I a acesteia) depinde şi ea de pulsaţia generatorului. Mărind continuu pulsaţia generatorului şi menţinând constantă amplitudinea tensiunii de alimentare, observăm că amplitudinea curentului creşte continuu, atinge un maximum şi apoi descreşte. Maximul amplitudinii intensităţii este atins în momentul în care *pulsaţia (frecvenţa) generatorului devine egală cu pulsaţia proprie a circuitului*. Spunem că are loc fenomenul de ***rezonanţă*** a *intensităţii* circuitului serie R.L.C. Circuitul este rezonatorul, iar generatorul – excitatorul.

La rezonanţa intensităţii, amplitudinea intensităţii curentului este maximă, iar intensitatea curentului este în fază cu tensiunea generatorului.

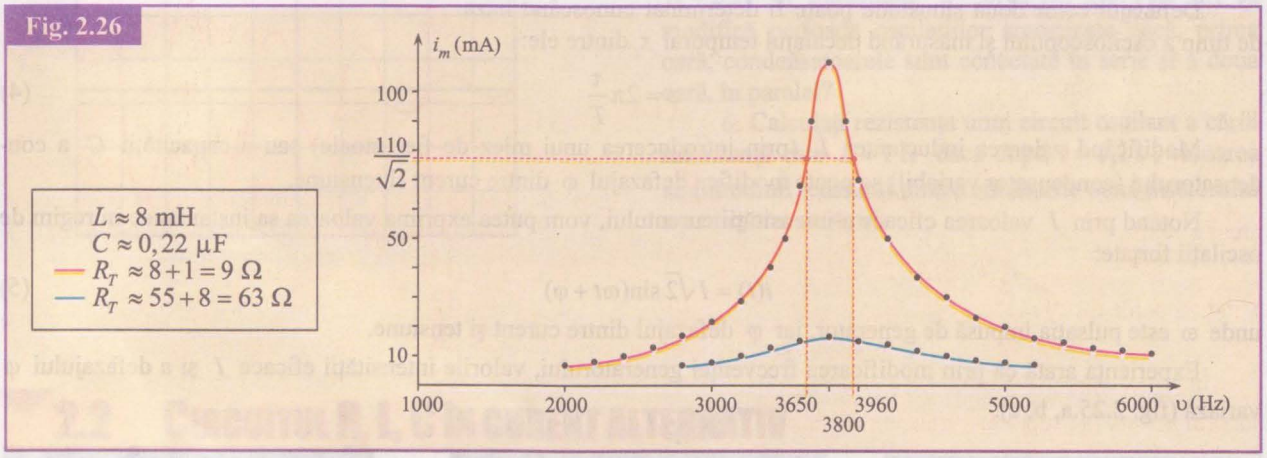
În tabelul de mai jos sunt înregistrate valorile frecvenței reglabile υ a generatorului, concomitent cu valorile amplitudinii I_m a curentului și a defazajului φ între curent și tensiune pentru un circuit conținând bobina de inductanță $L = 8$ mH și rezistență $r = 8\ \Omega$, condensatorul de capacitate $C = 0{,}22\ \mu$F și rezistorul de rezistență $r_1 = 1\ \Omega$.

υ (Hz)	2000	2200	2400	2600	2800	3000	3200	3400	3600	3800	4000
I_m (mA)	7,5	9	11	13	17	21	29	40	80	110	90
$\frac{\tau}{T}\left(\varphi = 2\pi\frac{\tau}{T}\right)$	+0,245	+0,245	+0,245	+0,245	+0,24	+0,24	+0,22	+0,22	+0,180	0	–0,16

υ (Hz)	4200	4400	4600	4800	5000	5200	5400	5600	5800	6000
I_m (mA)	52	36	28	23	19	17	15	13	12	11,5
$\frac{\tau}{T}\left(\varphi = 2\pi\frac{\tau}{T}\right)$	–0,20	–0,22	–0,23	–0,23	–0,24	–0,24	–0,24	–0,24	–0,245	–0,245

Curba ce reprezintă variația amplitudinii intensității curentului în funcție de frecvența (pulsația) generatorului este numită **curbă de rezonanță** și este redată cu roșu în fig. 2.26 pentru o rezistență totală $R = r + r_1 = 8\ \Omega + 1\ \Omega = 9\ \Omega$. Cu albastru am figurat curba de rezonanță a circuitului conținând aceeași bobină și același condensator în serie cu o rezistență ohmică mai mare, $r_1 = 55\ \Omega$ ($R_{tot} = r + r_1 = 63\ \Omega$). Observați că pentru o valoare

Fig. 2.26



dată a amplitudinii tensiunii, valoarea maximă a amplitudinii intensității (sau valoarea sa eficace maximă I_{max}) atinsă la rezonanță este cu atât mai mare cu cât rezistența totală R a circuitului este mai mică. Frecvența de rezonanță este aceeași în ambele cazuri, $\upsilon = \upsilon_0 = 3800$ Hz, fiind determinată exclusiv de valorile inductanței L și a capacității C.

În fig. 2.27 este reprezentată grafic variația defazajului curent-tensiune în funcție de frecvența impusă de generator pentru cele două valori ale rezistenței totale a circuitului. Remarcați anularea defazajului pentru frecvența de rezonanță $\upsilon = \upsilon_0 = 3800$ Hz.

Fig. 2.27

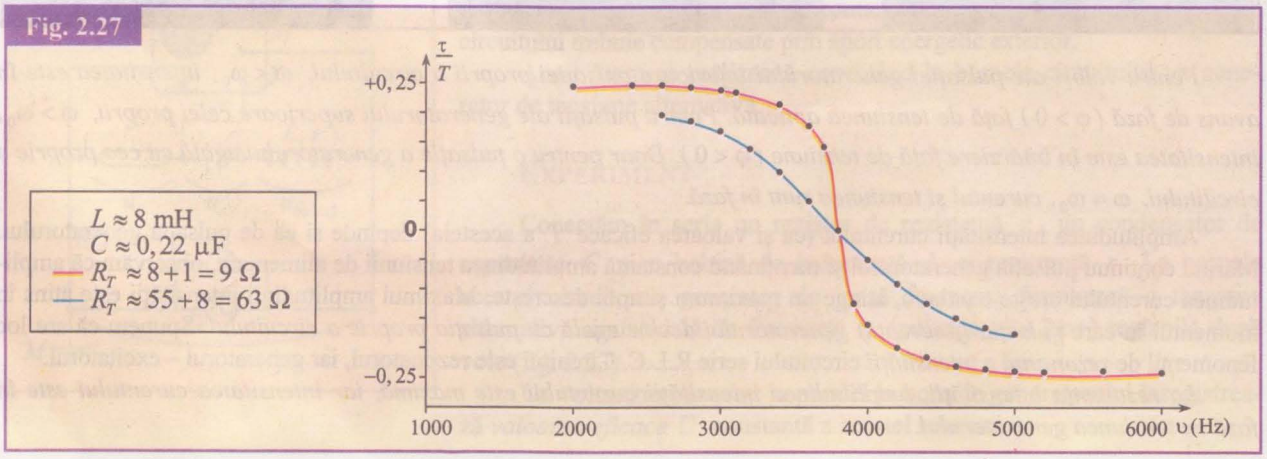


Diagrama fazorială a circuitului serie (R, L, C) alimentat de o tensiune alternativă sinusoidală

Pentru a modela matematic oscilaţiile forţate impuse circuitului serie (R, L, C) de tensiunea sinusoidală aplicată, vom începe prin a scrie legea lui Ohm pentru întregul circuit:

$$e_a + u(t) = u_c(t) + u_R(t) \tag{1}$$

unde $u_R(t) = u_{r1}(t) + u_r(t)$ reprezintă tensiunea impusă la bornele asociaţiei serie dintre rezistenţa bobinei şi cea a rezistorului din circuit. Legea lui Ohm se transcrie sub forma diferenţială:

$$L\frac{di}{dt} + Ri + \frac{q}{C} = u \tag{2}$$

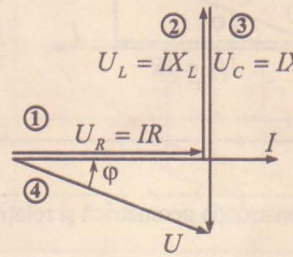
unde ω – pulsaţia reglabilă a generatorului.

Într-o primă etapă, după conectarea generatorului, variaţia intensităţii este complexă. Peste oscilaţiile proprii, care se amortizează rapid, se suprapun cele impuse de generator. Această fază în evoluţia sistemului oscilant, numită regim tranzitoriu, durează doar câteva miimi de secundă, după care amplitudinea curentului rămâne constantă, iar pulsaţia oscilaţiilor sale devine egală cu cea a generatorului. Sistemul evoluează acum în *regim permanent*. Soluţia ecuaţiei (2) în regim permanent o scriem sub forma:

$$i(t) = I\sqrt{2}\sin(\omega t + \varphi) \tag{3}$$

Vom utiliza construcţia fazorială Fresnel, numită *diagrama fazorială a tensiunilor*, pentru determinarea dependenţei intensităţii eficace I (sau a amplitudinii $I_m = I\sqrt{2}$) şi a defazajului φ de pulsaţia (frecvenţa) tensiunii aplicate. Tensiunea instantanee $u(t)$ se repartizează în fiecare moment la bornele dipolilor circuitului: rezistenţa totală $R = r_1 + r$, inductanţa L şi capacitatea C (ecuaţia (2)).

Fig. 2.28



Să considerăm drept referinţă a fazelor tensiunilor, faza ($\omega t + \varphi$) a intensităţii curentului.

Tensiunea la bornele elementului rezistiv $R = r_1 + r$ este în fază cu intensitatea:

$$u_R(t) = IR\sqrt{2}\cdot\sin(\omega t + \varphi) \tag{4}$$

având valoarea efectivă

$$U_R = IR \tag{5}$$

În reprezentarea fazorială din fig. 2.28, tensiunea $u_R(t)$ este reprezentată prin fazorul (1) suprapus fazorului reprezentând intensitatea curentului.

Tensiunea la bornele elementului inductiv (inductanţei pure a bobinei) la momentul t:

$$u_L(t) = L\frac{di}{dt} = IL\omega\sqrt{2}\cdot\cos(\omega t + \varphi) = IL\omega\sqrt{2}\cdot\sin(\omega t + \varphi + \frac{\pi}{2}) \tag{6}$$

Valoarea sa efectivă este:

$$U_L = I\cdot L\omega \tag{6'}$$

Definim *reactanţa inductivă* a bobinei la pulsaţia respectivă prin relaţia:

$$X_L = L\cdot\omega \tag{7}$$

Reactanţa X_L se măsoară în Ω, când inductanţa se măsoară în H, iar pulsaţia în rad s^{-1}.

Astfel,

$$U_L = I\cdot X_L \tag{8}$$

Să observăm că tensiunea la bornele elementului inductiv (L) de circuit are un avans de fază de $\frac{\pi}{2}$ faţă de intensitatea curentului (este în cuadratură avans faţă de aceasta):

$$u_L = I\cdot X_L\sqrt{2}\cdot\sin\left(\omega t + \varphi + \frac{\pi}{2}\right) \tag{9}$$

Pe diagramă, tensiunea $u_L(t)$ este reprezentată prin fazorul (2).

Tensiunea instantanee la bornele elementului capacitiv (C) al circuitului are expresia:

$$u_C(t) = \frac{q(t)}{C} \tag{10}$$

Utilizând relaţia dintre intensitate şi sarcina instantanee

$$i(t)=\frac{dq(t)}{dt} \tag{11}$$

obţinem:

$$u_C(t)=\frac{I}{C\omega}\sqrt{2}\left[-\cos(\omega t+\varphi)\right]=\frac{I}{C\omega}\sqrt{2}\sin(\omega t+\varphi-\frac{\pi}{2}) \tag{12}$$

Mărimea

$$X_C=\frac{1}{C\omega} \tag{13}$$

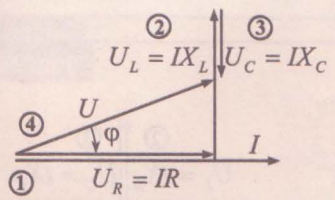
defineşte *reactanţa capacitivă* a condensatorului la frecvenţa respectivă a tensiunii şi se măsoară în Ω, când pulsaţia se măsoară în rad s^{-1} iar capacitatea în F.

Astfel tensiunea efectivă la bornele condensatorului devine:

$$U_C=IX_C \tag{14}$$

Să observăm că tensiunea instantanee $u_C(t)$ este în orice moment de timp defazată în urma intensităţii cu $\frac{\pi}{2}$ (cuadratură retard). În fig. 2.28 am reprezentat-o prin fazorul (3), aflat în opoziţie cu fazorul (2), ce reprezintă tensiunea la bornele elementului inductiv, $u_L(t)$.

Fig. 2.29



Suma vectorială a fazorilor (1), (2) şi (3) este, conform regulii poligonului, fazorul (4), reprezentând tensiunea la bornele generatorului. Cum faza acesteia este ωt rezultă că unghiul dintre fazorii (1) şi (4) este chiar defazajul dintre tensiunea generatorului şi intensitatea curentului. Remarcaţi că *dacă* $u_C>u_L$, *adică* $X_C>X_L$ *(circuit capacitiv), intensitatea este în avans de fază faţă de tensiune* ($\varphi>0$).

Dacă circuitul este inductiv, $X_L>X_C$ (fig. 2.29), *curentul este defazat în urma tensiunii generatorului* ($\varphi<0$).

Construcţia geometrică şi relaţiile din triunghiul dreptunghic format permit calculul intensităţii efective a curentului:

$$I=\frac{U}{\sqrt{R^2+\left(X_L+X_C\right)^2}} \tag{15}$$

Mărimea de la numitor poartă numele de **impedanţă** *a circuitului serie* la pulsaţia ω, impusă de generator:

$$Z=\sqrt{R^2+\left(X_L-X_C\right)^2}=\sqrt{R^2+\left(L\omega-\frac{1}{C\omega}\right)^2} \tag{16}$$

Impedanţa Z se măsoară în Ω, ca şi rezistenţa R şi reactanţele X_L şi X_C.

Relaţia (15) devine

$$I=\frac{U}{Z} \tag{15'}$$

şi reprezintă *legea lui Ohm* în circuitul de curent alternativ.

Dependenţa intensităţii eficace de pulsaţia generatorului este:

$$I(\omega)=\frac{U}{\sqrt{R^2+\left(L\omega-\frac{1}{C\omega}\right)^2}} \tag{17}$$

Reprezentarea sa grafică este curba de rezonanţă trasată experimental în paragraful precedent. Rezonanţa intensităţii are loc atunci când valoarea eficace a intensităţii curentului (şi implicit a amplitudinii acesteia) atinge un maxim, adică atunci când impedanţa $Z(\omega)$ devine minimă. Se verifică analitic faptul că aceasta are loc pentru:

$$L\omega_{rez}-\frac{1}{C\omega_{rez}}=0 \tag{18}$$

de unde

$$\omega_{rez}=\omega_0=\frac{1}{\sqrt{LC}} \tag{19}$$

Pulsaţia generatorului pentru care se instalează rezonanţa este egală cu pulsaţia proprie ω_0 *a circuitului.*

În condițiile rezonanței, impedanța este egală cu rezistența circuitului:

$$Z_{rez} = R \tag{20}$$

Reactanțele elementelor inductive sunt egale la rezonanță:

$$X_{L\,rez} = X_{C\,rez} \tag{21}$$

iar tensiunile la bornele acestora, reprezentate prin fazorii 2 și 3, sunt egale și în opoziție de fază:

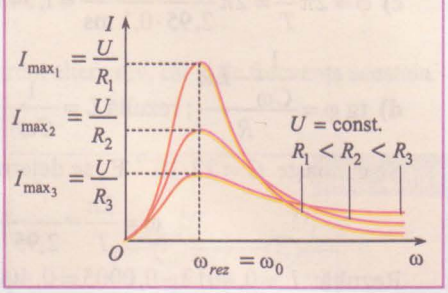
$$U_{L\,rez} = U_{C\,rez} \tag{22}$$

Valoarea efectivă maximă atinsă la rezonanță este:

$$I_{max} = \frac{U}{R} \tag{23}$$

Înțelegeți acum de ce rezonanța este cu atât mai pronunțată (maximum mai înalt) cu cât rezistența circuitului oscilant este mai mică (fig. 2.30).

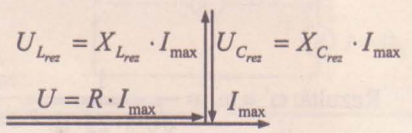
Fig. 2.30



Revenind la triunghiul fazorilor (fig. 2.28 și fig. 2.29) obținem imediat funcțiile trigonometrice ale unghiului de defazaj φ, în funcție de pulsația generatorului. Astfel:

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{X_C - X_L}{R} = \frac{\frac{1}{C\omega} - L\omega}{R} = \frac{1 - LC\omega^2}{RC\omega} \tag{24}$$

Fig. 2.31

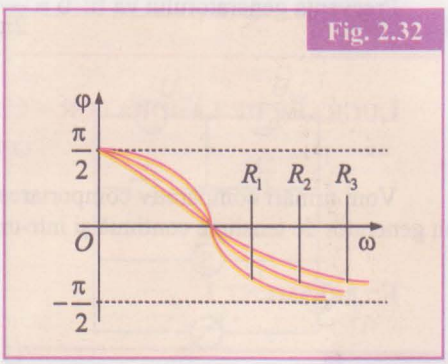


Remarcați că dacă circuitul este capacitiv ($X_C > X_L$) curentul este în avans de fază în raport cu tensiunea aplicată ($\varphi > 0$), iar dacă este inductiv ($X_L > X_C$), curentul este defazat în urma tensiunii ($\varphi < 0$).

La rezonanță ($X_{L\,rez} = X_{C\,rez}$), curentul este în fază cu tensiunea ($\varphi = 0$, fig. 2.31).

Dependența defazajului φ de pulsația generatorului este redată în fig. 2.32 pentru diferite valori ale parametrului R, rezistența circuitului. Aspectul teoretic al acestor grafice confirmă curbele experimentale obținute în paragraful anterior (fig. 2.27).

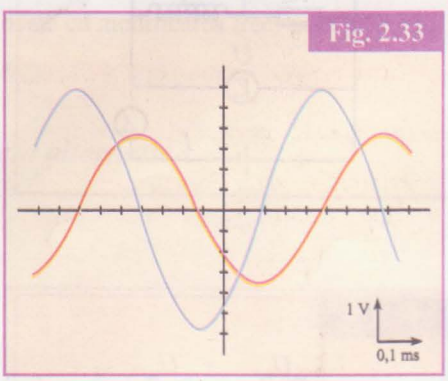
Fig. 2.32



Exercițiu aplicativ

Enunț: Un generator de joasă frecvență variabilă este conectat la bornele unui circuit serie constituit dintr-un rezistor de rezistență $R = 220\ \Omega$, un condensator de capacitate $C = 22$ nF și o bobină de inductanță L necunoscută și de rezistență proprie neglijabilă față de R. Cu ajutorul unui osciloscop cu dublu spot s-au obținut oscilogramele din fig. 2.33, cu un baleiaj orizontal (baza de timp) de 0,1 ms/div și o sensibilitate verticală de 1 V/div, pentru tensiunile $u(t)$, la bornele generatorului (albastru), și $u_1 = Ri(t)$, la bornele rezistorului (roșu).

Fig. 2.33



a) Calculați amplitudinea tensiunii furnizate de generator și valoarea sa eficace.

b) Calculați amplitudinea intensității curentului și valoarea sa eficace.

c) Determinați defazajul dintre curent și tensiune.

d) Calculați impedanța circuitului.

e) Calculați inductanța bobinei.

f) Pentru ce valoare a frecvenței generatorului cele două tensiuni $u(t)$ și $u_1(t)$ ar fi în fază, dacă inductanța bobinei devine $L = 0{,}5$ H ?

Soluție: a) $U_m = 2{,}9$ V, $U = \frac{U_m}{\sqrt{2}} = 2{,}05$ V ;

b) $I_m = \frac{U_{1m}}{R} = \frac{1{,}8}{220} = 8{,}2$ mA; $I = \frac{I_m}{\sqrt{2}} = 5{,}8$ mA ;

c) $\varphi = 2\pi\frac{\tau}{T} = 2\pi\frac{1{,}45\cdot 0{,}1\text{ ms}}{2{,}95\cdot 0{,}1\text{ ms}} = 1{,}543\text{ rad} = 88{,}5^\circ$;

d) $\operatorname{tg}\varphi = \dfrac{\frac{1}{C\omega} - L\omega}{R}$; rezultă $L = \dfrac{1}{C\omega^2} - \dfrac{R}{\omega}\operatorname{tg}\varphi$

Se cunoaşte $C = 22\cdot 10^{-9}$ F, se determină:

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{2{,}95\cdot 2\cdot 0{,}1\cdot 10^{-3}}\frac{\text{rad}}{\text{s}} = 10644\text{ rad/s}$$ şi $\operatorname{tg} 88{,}5^\circ = 38{,}2$.

Rezultă: $L = 0{,}4012 - 0{,}0005 = 0{,}4007 \cong 0{,}4$ H.

f) Rezonanţa se instalează dacă pulsaţia proprie este egală cu cea a tensiunii aplicate.
În acest caz, defazajul este nul, $\varphi' = 0$

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} = \omega'$$

Rezultă: $\omega' = \omega_0 = \dfrac{1}{\sqrt{0{,}5\cdot 22\cdot 10^{-9}}}\dfrac{\text{rad}}{\text{s}} = \dfrac{10^4}{1{,}0488}\dfrac{\text{rad}}{\text{s}} = 9534{,}7\dfrac{\text{rad}}{\text{s}}$

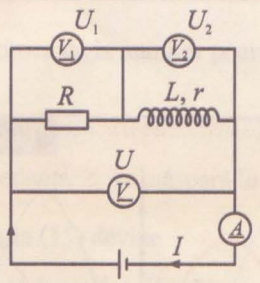
Frecvenţa generatorului va fi: $\upsilon = \dfrac{\omega'}{2\pi} = 1518$ Hz

LUCRARE DE LABORATOR – *Comportarea rezistorului, bobinei şi condensatorului în curent continuu şi alternativ*

Vom urmări comparativ comportarea câtorva dipoli (rezistori, bobine, condensatori) într-un circuit alimentat de un generator de tensiune continuă şi într-un circuit alimentat de o tensiune alternativă.

EXPERIMENT 1

Fig. 2.34



Fie circuitul format dintr-un rezistor R şi o bobină reală de inductanţă L şi rezistenţă r conectate în serie la bornele unei surse de tensiune continuă (fig. 2.34). Ampermetrul de curent continuu va indica trecerea unui curent de intensitate I. Voltmetrele V, V_1 şi V_2 indică tensiunile U, U_1 şi U_2 între care, în limita erorilor experimentale, obţinem relaţia:

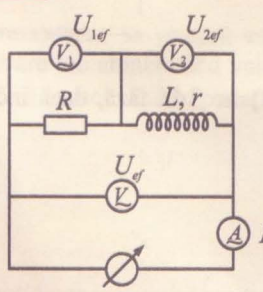
$$U = U_1 + U_2$$

Dacă se cunosc valorile rezistenţelor R şi r, putem verifica uşor că

$$I = \frac{U}{R}$$

prin urmare, în curent continuu prezenţa inductanţei L a bobinei nu are nici o influenţă asupra mărimilor caracteristice curentului.

Fig. 2.35



EXPERIMENT 2

Alimentăm acum aceleaşi elemente de circuit de la un generator de tensiune alternativă de amplitudine şi frecvenţă reglabile din dotarea laboratorului (fig. 2.35). Ampermetrul (de curent alternativ) va înregistra trecerea unui curent de intensitate efectivă I_{ef} iar voltmetrele V, V_1 şi V_2 (de tensiune alternativă) vor înregistra tensiunile efective U_{ef}, U_{1ef} şi U_{2ef}. Constatăm experimental că $U_{ef} \neq U_{1ef} + U_{2ef}$.

De asemenea, rapoartele $\dfrac{U_{ef}}{I_{ef}}$ şi $\dfrac{U_{2ef}}{I_{ef}}$ se modifică odată cu modificarea frecvenţei generatorului.

Intensitatea efectivă a curentului înregistrată de ampermetru depinde, de asemenea, de frecvenţa generatorului.

În plus, $I_{ef} < \frac{U_{ef}}{R+r}$, pentru orice frecvenţă a generatorului.

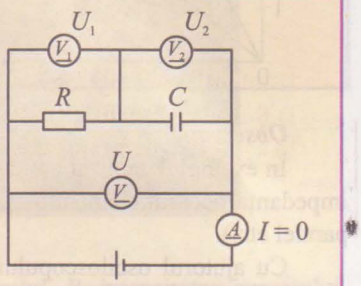
Raportul dintre U_{ef} şi I_{ef} depinde atât de inductanţa L a circuitului de curent alternativ, cât şi de frecvenţa acestuia.

EXPERIMENT 3

Conectăm în serie un rezistor R şi un condensator de capacitate C la bornele unui generator de tensiune continuă (fig. 2.36). După un scurt interval de timp, constatăm că prin circuit nu circulă curent electric ($I = 0$), iar tensiunea la bornele condensatorului U_1, este egală cu tensiunea U la bornele generatorului.

Condensatorul C constituie o *întrerupere* a circuitului de curent electric continuu. El se încarcă rapid cu sarcini electrice egale şi se semne contrare pe armături, $\pm Q$, astfel încât $Q = C \cdot U_1 = C \cdot U$.

Fig. 2.36



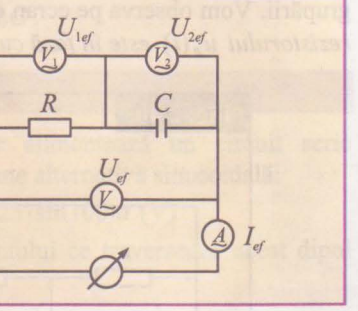
EXPERIMENT 4

Alimentăm gruparea serie RC la un generator de tensiune alternativă de amplitudine şi frecvenţă reglabile. (fig. 2.37).

Constatăm că ampermetrul indică trecerea curentului alternativ prin dipol şi că intensitatea efectivă a acestuia, I_{ef}, depinde de frecvenţă când amplitudinea tensiunii aplicate este menţinută constantă.

Condensatorul permite, deci, trecerea curentului alternativ. În fapt, armăturile sale se încarcă alternativ (în ritmul frecvenţei generatorului) cu sarcina $q(t)$ a cărei variaţie în timp este sinusoidală, ceea ce determină apariţia unui câmp electric alternativ sinusoidal între armăturile sale $E(t)$ şi a unei tensiuni de asemenea sinusoidale la bornele sale. Putem considera că dipolul condensator este „parcurs" de curentul instantaneu $i = \frac{\Delta q}{\Delta t}$ determinat de variaţie instantanee a sarcinii de pe armături. Faptul este confirmat şi de existenţa unei tensiuni la bornele rezistenţei R.

Fig. 2.37



Urmărind valorile efective ale tensiunilor observăm că $U_{ef} \neq U_{1ef} + U_{2ef}$.

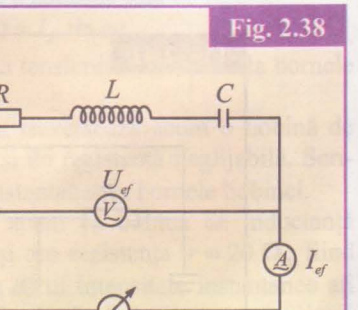
De asemenea, constantăm că raportul $\frac{U_{2ef}}{I_{ef}}$ ca şi raportul $\frac{U_{ef}}{I_{ef}}$ variază odată cu modificarea frecvenţei generatorului sau a capacităţii condensatorului.

LUCRARE DE LABORATOR – *Studiul dipolului RLC în curent alternativ*

EXPERIMENT

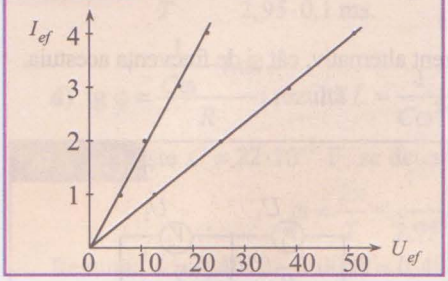
La bornele unui generator de tensiune alternativă de frecvenţă şi amplitudine reglabile este conectat un dipol constituit dintr-un rezistor R, o bobină L şi un condensator C legate în serie (fig. 2.38). Un ampermetru de c.a. montat în serie cu dipolul RLC măsoară intensitatea eficace a curentului, iar un voltmetru plasat între bornele dipolului măsoară tensiunea eficace. Pentru diferite valori ale lui U_{ef} se măsoară valorile lui I_{ef}. Se înscriu datele într-un tabel de forma celui de mai jos.

Fig. 2.38



υ [Hz]	U_{ef} [V]	1	2	3	4	...
440	I_{ef} [mA]	5,7	10,2	17,0	22,8	...
680	I_{ef} [mA]	13,1	26,3	39,5	52,5	...

Fig. 2.39



Se trasează graficele $I_{ef}(U_{ef})$. Acestea reprezintă, pentru fiecare frecvență, drepte care trec prin origine (fig. 2.39). Rezultă că, pentru fiecare frecvență, raportul $\frac{U_{ef}}{I_{ef}}$ este constant.

Prin definiție raportul

$$Z \equiv \frac{U_{ef}}{I_{ef}}$$

reprezintă ***impedanța*** *dipolului considerat.*

Impedanța depinde de frecvență.

Observație

În exemplul analizat am definit impedanța unui circuit RLC serie. Se poate defini de asemenea, în același mod, impedanța fiecărui element de circuit (R sau L sau C) sau a oricărei grupări posibile (RL serie, RC serie, RLC paralel etc.).

Cu ajutorul osciloscopului cu dublu spot (două intrări A și B) vom vizualiza simultan tensiunea la bornele fiecărui element de circuit (intrarea A) și intensitatea curentului prin circuitul serie (intrarea B).

a) tensiunea la bornele unui rezistor R alimentat în c.a.

Pentru a vizualiza intensitatea curentului $i(t)$ ce parcurge dipolul conectăm la intrarea A a osciloscopului bornele unui conductor ohmic înseriat cu dipolul. (fig. 2.40). Pe canalul B vom vizualiza tensiunea la bornele grupării. Vom observa pe ecran două sinusoide de aceeași perioadă în fază. Tragem concluzia că *tensiunea la bornele rezistorului* $u_R(t)$ *este în fază cu intensitatea curentului electric* $i(t)$ (fig. 2.41).

Fig. 2.40

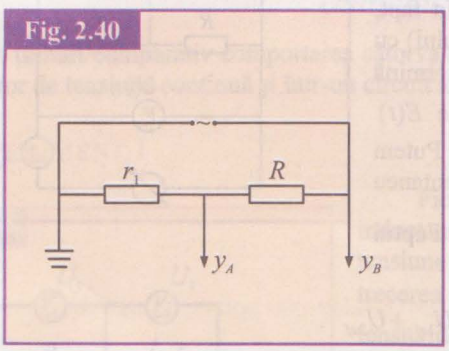
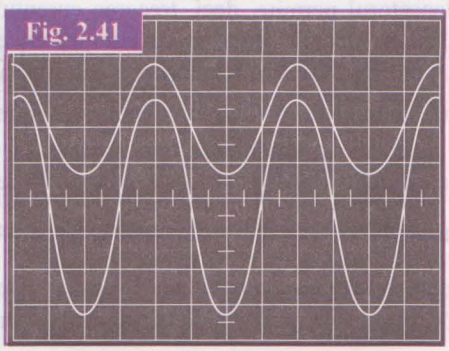


Fig. 2.41



b) tensiunea la bornele unei bobine reale

Vizualizăm pe osciloscopul cu două canale tensiunea la bornele unei bobine reale (de inductanță L și rezistență r) în serie cu un rezistor R pe canalul A și intensitatea curentului în circuit (în fază cu tensiunea la bornele rezistorului R) pe canalul B (fig. 2.42).

Observăm două sinusoide de aceeași perioadă, decalate una în raport cu cealaltă. Variind frecvența generatorului observăm că decalajul dintre cele două curbe crește. *Tensiunea la bornele bobinei este întotdeauna în avans de fază față de intensitatea curentului* (deoarece trece prima printr-un maxim când ne deplasăm în lungul axei timpului) (fig. 2.43).

c) tensiunea la bornele condensatorului

Fig. 2.42

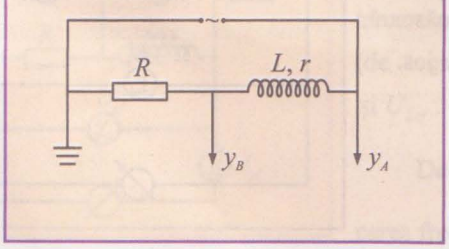
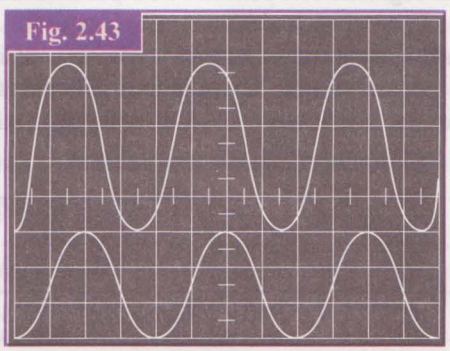


Fig. 2.43



Realizăm conectarea la osciloscop ca în fig. 2.44.

Remarcați că decalajul dintre cele două curbe s-a inversat (fig. 2.45). Spunem că *tensiunea la bornele condensatorului este întotdeauna defazată în urma intensității curentului* (întârziere de fază), oricare ar fi valoarea frecvenței.

Fig. 2.44

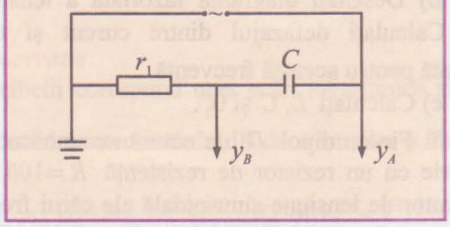
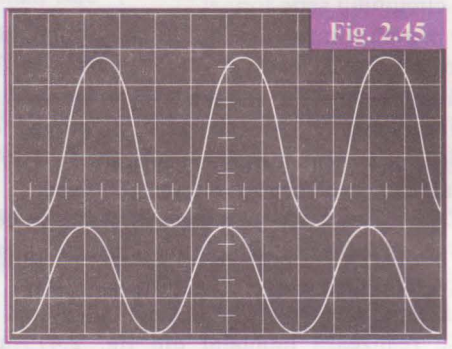


Fig. 2.45



d) tensiunea la bornele dipolului *RLC*

Se vizualizează pe canalul *A* tensiunea la bornele dipolului *RLC* și pe canalul *B* intensitatea curentului. Constatăm că pentru frecvențe mai mari decât o anumită frecvență, ω_0, tensiunea este în avans față de curent. Spunem că circuitul este *inductiv* pentru $\omega > \omega_0$, pentru frecvențe sub ω_0 ($\omega < \omega_0$) tensiunea este defazată în urma intensității. În acest caz, circuitul este numit *capacitiv*. Pentru frecvența ω_0, numită de *rezonanță*, intensitatea curentului și tensiunea sunt *în fază*. Frecvența ω_0 este caracteristică fiecărui dipol *RLC*.

Probleme propuse

1. Cu ajutorul unui rezistor de rezistență R, al unui condensator de capacitate C și al unei bobine de inductanță L și de rezistență neglijabilă se realizează succesiv trei dipoli: un circuit serie (R, L); un circuit serie (R, C); un circuit serie (R, L, C).

Se alimentează pe rând circuitele de la un generator de tensiune alternativă $u(t)$, de valoare efectivă U și de pulsație ω variabilă.

a) Exprimați pentru fiecare dintre dipolii (circuitele) descrișii impedanța în funcție de caracteristicile acestora și de pulsația ω a generatorului.

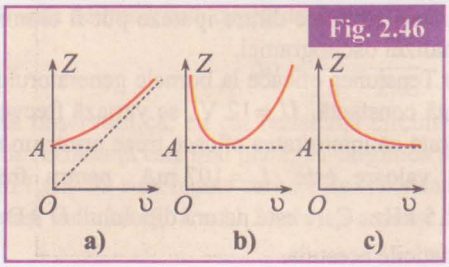
b) Se studiază dependența impedanței fiecărui dipol de frecvența generatorului. Se obțin curbele din fig. 2.46.a, b și c. Deduceți corespondența dintre cele trei curbe și cele trei circuite.

c) Ce reprezintă ordonata *A* de pe fiecare curbă?

d) Justificați faptul că inductanța se comportă ca un scurt-circuit la frecvențe joase și faptul că un condensator se comportă ca un scurt-circuit la frecvențe înalte.

e) În cazul dipolului (R, L, C), exprimați frecvența pentru care impedanța este minimă.

Fig. 2.46



2. Un generator alimentează un circuit serie (R, L, C) sub o tensiune alternativă sinusoidală:

$$u(t) = 25 \cdot \sin 100\pi t \text{ (V)}$$

Intensitatea curentului ce traversează acest dipol este de forma:

$$i(t) = 0{,}5 \cdot \sin\left(100\pi t - \frac{\pi}{4}\right) \text{(A)}.$$

a) Calculați impedanța circuitului.

b) Calculați rezistența circuitului.

c) Calculați inductanța L a bobinei și capacitatea C a condensatorului, știind că pentru o frecvență $\upsilon_0 = 44$ Hz a generatorului curentul este în fază cu tensiunea aplicată.

Amplitudinea tensiunii rămâne constantă, 25 V.

3. Un condensator de capacitate $C = 5$ μF este traversat de un curent alternativ sinusoidal de frecvență $\upsilon = 400$ Hz și de intensitate eficace $I = 0{,}16$ A. Intensitatea instantanee a acestuia este de forma:

$$i(t) = I_m \sin \omega t.$$

a) Scrieți expresia tensiunii instantanee la bornele condensatorului.

b) Același curent traversează acum o bobină de inductanță $L = 3$ mH și de rezistență neglijabilă. Scrieți expresia tensiunii instantanee la bornele bobinei.

c) Se consideră acum că bobina de inductanță $L = 3$ mH este reală și are rezistența $r = 20\ \Omega$, fiind parcursă de curentul a cărui intensitate instantanee ați exprimat-o la punctul **a)**. Scrieți expresia tensiunii instantanee la bornele bobinei reale.

d) Condensatorul şi bobina reală sunt înseriate şi sunt parcurse acum de curentul de intensitate $i(t)$ determinată la **a)**. Scrieţi expresia tensiunii instantanee la bornele circuitului serie format.

4. O bobină alimentată sub o tensiune continuă de 120 V este parcursă de un curent cu intensitatea de 2 A; alimentată sub o tensiune sinusoidală cu frecvenţa de 50 Hz şi valoarea eficace de 100 V, bobina este parcursă de un curent cu intensitatea eficace de 0,5 A.

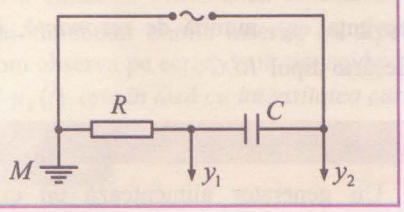
a) Calculaţi inductanţa şi rezistenţa bobinei.

b) Calculaţi în grade faza curentului faţă de cea a tensiunii alternative sinusoidale aplicate la bornele bobinei.

c) Scrieţi expresiile valorilor instantanee ale tensiunii la borne şi respectiv intensităţii curentului.

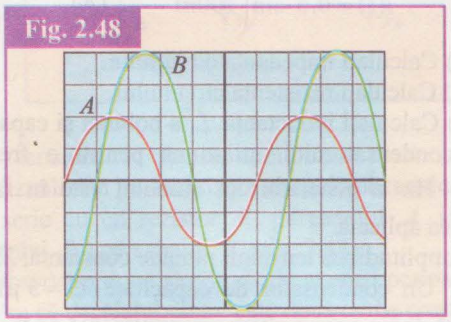
5. Se realizează montajul din fig. 2.47, unde $R = 100\ \Omega$, iar C este un condensator de capacitate necunoscută.

Fig. 2.47



Se alimentează circuitul serie (R, C) de la un generator de tensiune sinusoidală. Se observă simultan pe ecranul osciloscopului tensiunea la bornele rezistorului şi cea de la bornele dipolului (R, C), reprezentate în fig. 2.48.

Fig. 2.48



Baza de timp este de 1 ms/div, iar sensibilitatea osciloscopului de 2 V/div pentru ambele căi.

a) Calculaţi impedanţa circuitului serie (R, C).

b) Determinaţi defazajul între curent şi tensiunea aplicată.

c) Calculaţi reactanţa şi capacitatea condensatorului.

6. Se montează în serie o bobină de rezistenţă r şi inductanţă L şi un condensator de capacitate C şi se alimentează ansamblul sub o tensiune

$$u(t) = = U\sqrt{2} \cdot \sin 2\pi\upsilon t$$

cu $U = 120$ V şi frecvenţa υ reglabilă. Pentru frecvenţa $\upsilon_0 = 159$ Hz, intensitatea eficace a curentului prin circuit are valoarea maximă $I_0 = 1{,}33$ A. Pentru o altă frecvenţă, υ_1, intensitatea eficace are valoarea $I_1 = 0{,}8$ A şi tensiunea eficace la bornele condensatorului este $U_{C1} = 128$ V.

a) Calculaţi rezistenţa r a bobinei. Determinaţi impedanţa circuitului serie şi reactanţa condensatorului la frecvenţa υ_1.

b) Desenaţi diagrama fazorială a tensiunilor la υ_1. Calculaţi defazajul dintre curent şi tensiunea aplicată pentru această frecvenţă.

c) Calculaţi L, C şi υ_1.

7. Fie un dipol D de natură necunoscută montat în serie cu un rezistor de rezistenţă $R = 100\ \Omega$ şi un generator de tensiune sinusoidală ale cărui frecvenţă şi tensiune eficace sunt reglabile (fig. 2.49). Fig. 2.50 reprezintă oscilograma tensiunii la bornele circuitului serie (R, D) şi respectiv la bornele rezistorului.

Fig. 2.49

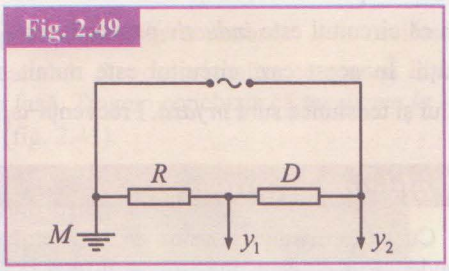
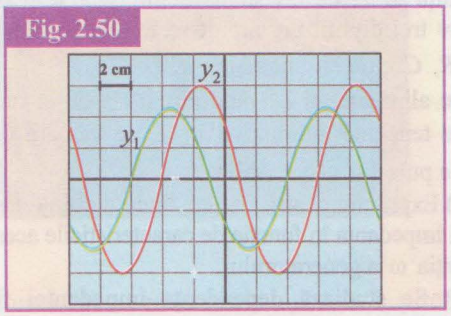


Fig. 2.50



Osciloscopul are următoarele reglaje: 50 μs/cm pentru baza de timp; 0,5 V/cm pentru (Y1) şi 1 V/ cm pentru (Y2).

a) Se fac următoarele ipoteze:

– D este un rezistor de rezistenţă R;

– D este o bobină de rezistenţă r şi inductanţă L;

– D este un condensator de capacitate C;

– D este un circuit serie bobină (r, L) – condensator (C).

Arătaţi că unele dintre ipoteze pot fi eliminate în urma analizei oscilogramei.

b) Tensiunea eficace la bornele generatorului fiind menţinută constantă, $U = 12$ V, se variază frecvenţa sa. Se constată că intensitatea eficace trece printr-un maxim a cărui valoare este $I_0 = 107$ mA pentru frecvenţa $\upsilon_0 = 2{,}15$ kHz. Care este natura dipolului D ? Deduceţi caracteristicile acestuia.

Banda de trecere. Factorul de calitate

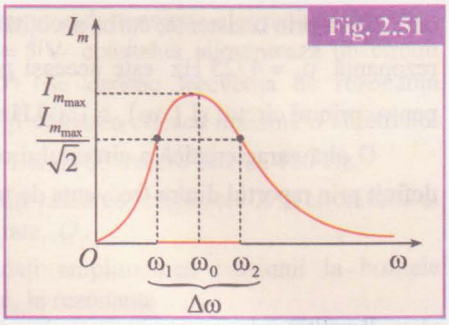


Fig. 2.51

Caracterizăm curba de rezonanță $I_m(\omega)$ sau $I(\omega)$ a unui circuit serie (R, L, C) alimentat de o tensiune alternativă sinusoidală de frecvență reglabilă și valoare efectivă constantă prin lărgimea benzii sale de trecere, numită și banda de 3 dB.

Banda de trecere reprezintă intervalul de frecvențe (pulsații) pentru care amplitudinea I_m a curentului este superioară valorii $\frac{I_{m\max}}{\sqrt{2}}$ (fig. 2.51).

Observație

Decibelii corespund unei scări logaritmice și permit măsurarea raportului a două mărimi de același fel. Putem exprima astfel o intensitate în dB dacă am ales o intensitate de referință. De exemplu, raportul $\frac{I_m(\omega_1)}{I_m(\omega_0)} = \frac{I_m(\omega_2)}{I_m(\omega_0)} = \frac{1}{\sqrt{2}}$ conduce, prin logaritmare, la relația $20\lg\frac{I_m(\omega_1)}{I_m(\omega_0)} = 20\lg\frac{1}{\sqrt{2}} = -3$ dB.

Pulsațiile ω_1, ω_2 care delimitează banda de trecere se deduc din condiția:

$$I_m(\omega_1) = I_m(\omega_2) = \frac{I_{m\max}}{\sqrt{2}} = \frac{I_m(\omega_0)}{\sqrt{2}} \tag{1}$$

unde

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \tag{2}$$

reprezintă pulsația de rezonanță egală cu pulsația proprie de oscilație a circuitului.

Rezultă

$$\frac{U_m}{\sqrt{R^2 + \left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)^2}} = \frac{U_m}{\sqrt{2}R} \tag{3}$$

și de aici:

$$\left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)^2 = R^2 \tag{4}$$

Pentru $\omega < \omega_0$ (circuit capacitiv, $\frac{1}{C\omega} > L\omega$) ecuația (4) se scrie:

$$\frac{1}{C\omega} - L\omega = R \text{ sau } LC\omega^2 + RC\omega - 1 = 0$$

și are soluția reală, pozitivă:

$$\omega_1 = \frac{-RC + \sqrt{R^2C^2 + 4LC}}{2LC} \tag{5}$$

Pentru $\omega > \omega_0$ circuit inductiv, ecuația (4) devine: $L\omega - \frac{1}{C\omega} = R$ sau $LC\omega^2 - RC\omega - 1 = 0$

cu soluția reală, pozitivă:

$$\omega_2 = \frac{RC + \sqrt{R^2C^2 + 4LC}}{2LC} \tag{6}$$

Lărgimea benzii pulsațiilor de trecere va fi:

$$\Delta\omega = \omega_2 - \omega_1 = \frac{R}{L} \tag{7}$$

Banda de trecere va cuprinde domeniul de frecvențe:

$$\Delta\upsilon = \frac{\Delta\omega}{2\pi} = \frac{R}{2\pi L} \tag{8}$$

Să observăm că, cu cât rezistența circuitului este mai mare, cu atât curba de rezonanță este mai plată, iar lărgimea de bandă mai mare.

În fig. 2.52 sunt redate curbele de rezonanță pentru două circuite serie de aceeași inductanță, $L = 11{,}3$ mH, și aceeași capacitate, $C = 0{,}1$ μF, dar

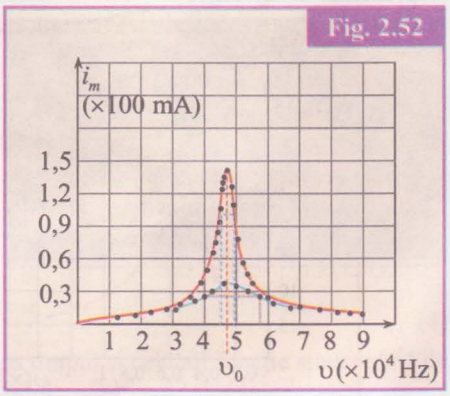


Fig. 2.52

care diferă prin rezistență; curba ascuțită este trasată pentru $R_1 = 32\ \Omega$, iar cea plată pentru $R_2 = 122\ \Omega$. Frecvența de rezonanță $\upsilon_0 = 4725$ Hz este aceeași pentru ambele circuite. Ele diferă prin lărgimea de bandă, $(\Delta\upsilon)_1 \cong 450$ Hz pentru primul circuit și $(\Delta\upsilon)_2 \cong 1600$ Hz pentru cel de-al doilea.

O altă caracteristică a circuitului oscilant serie alimentat de o tensiune alternativă este *factorul de calitate* Q, definit prin raportul dintre frecvența de rezonanță și lărgimea de bandă:

$$Q \overset{def}{=} \frac{\upsilon_0}{\Delta\upsilon} = \frac{\omega_0}{\Delta\omega} \tag{9}$$

Rezultă:

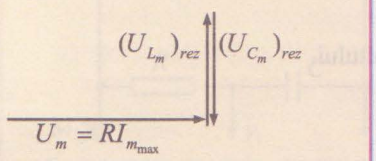
$$Q = \frac{1}{R}\sqrt{\frac{L}{C}} \tag{10}$$

Factorul de calitate nu depinde de amplitudinea tensiunii impuse de generator, fiind determinat exclusiv de mărimile caracteristice circuitului, R, L și C.

Curba de rezonanță este cu atât mai îngustă (rezonanță înaltă) cu cât factorul de calitate este mai mare față de 1. Amplitudinea intensității nu ia valori importante decât într-un domeniu îngust de frecvențe. Spunem că circuitul este selectiv.

Dacă Q este de ordinul unității sau inferior lui 1, curba de rezonanță este plată; circuitul nu privilegiază nici o frecvență, el nu este *selectiv*.

Fig. 2.53



Fenomenul de supratensiune

Măsurând tensiunea la bornele condensatorului în cazul unui circuit selectiv aflat la rezonanță, veți constata că valoarea sa eficace (egală cu cea de la bornele bobinei) este foarte mare. Uneori tensiunea la bornele condensatorului întrece cu mult tensiunea eficace aplicată de generator (fig. 2.53).

Puteți verifica faptul că raportul dintre amplitudinea tensiunii la bornele condensatorului sau bobinei la rezonanță și amplitudinea tensiunii generatorului este chiar factorul de calitate al circuitului:

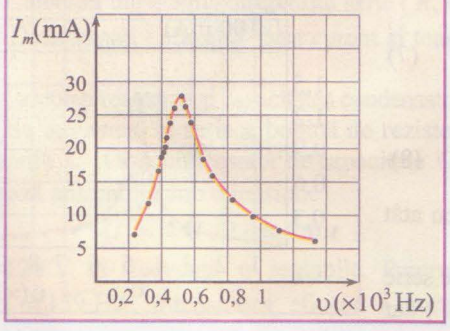
$$Q = \frac{(U_{Cm})_{rez}}{U_m} = \frac{(U_{Lm})_{rez}}{U_m} = \frac{\frac{1}{C\omega_0}}{R} = \frac{L\omega_0}{R} = \frac{1}{R}\sqrt{\frac{L}{C}} \tag{11}$$

Fenomenul este numit supratensiune. Valorile lui $(U_{Cm})_{rez}$ sau $(U_{Lm})_{rez}$ pot atinge câteva sute de volți, ceea ce poate provoca „străpungerea" condensatorului sau, pentru o bobină de rezistență mică, descărcări electrice între spire.

Exerciții propuse

1. Într-un experiment s-a studiat intensitatea efectivă a curentului într-un circuit serie (R, L, C) în funcție de frecvența generatorului. S-a trasat graficul amplitudinii intensității în funcție de frecvență, $I_m(\upsilon)$, reprezentat în fig. 2.54.

Fig. 2.54



a) Evaluați frecvența de rezonanță υ_0 și amplitudinea maximă $I_{m\,max}$ a intensității.

b) Calculați rezistența totală R a circuitului, știind că amplitudinea tensiunii aplicate este 4 V.

c) Determinați frecvențele υ_1 și υ_2 ce mărginesc banda de trecere, precum și lărgimea acesteia.

d) Calculați factorul de calitate și caracterizați selectivitatea circuitului.

e) Calculați inductanța bobinei și rezistența totală a circuitului dacă se cunoaște capacitatea condensatorului, $C = 1\ \mu F$.

2. Figura 2.55 reprezintă curba de rezonanță a unui dipol (R, L, C) serie alimentat de o tensiune alternativă.

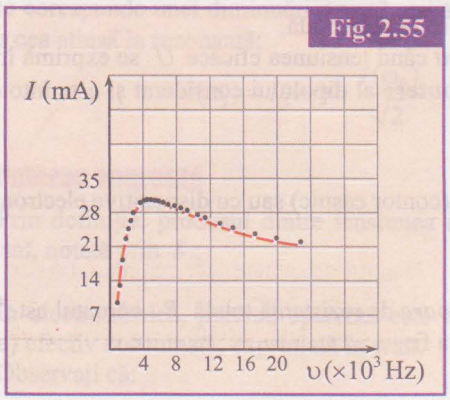
a) Determinați grafic frecvența de rezonanță și lărgimea benzii de trecere.

b) Calculați factorul de calitate al circuitului; caracterizați rezonanța.

c) Rezistența totală a circuitului este $R = 100\ \Omega$. Calculați valoarea efectivă a tensiunii furnizate de generator.

d) Calculați inductanța bobinei și capacitatea condensatorului.

Fig. 2.55



3. S-a trasat experimental graficul dependenței impedanței unui dipol (R, L, C) serie în funcție de frecvență (fig. 2.56).

a) Determinați frecvența de rezonanță și lărgimea de bandă.

b) Valoarea eficace a tensiunii aplicate fiind $U = 12$ V și frecvența acesteia $\upsilon = 1500$ Hz, calculați valoarea eficace a intensității curentului prin dipol.

c) Calculați supratensiunea la bornele condensatorului la rezonanță.

4. Un generator de tensiune alternativă cu valoarea eficace $U = 5$ V constantă alimentează un circuit serie (R, L, C). Se cunosc frecvența de rezonanță $\upsilon_0 = 1500$ Hz și valoarea eficace maximă a curentului $I_{max} = 50$ mA. Banda de trecere este de 160 Hz.

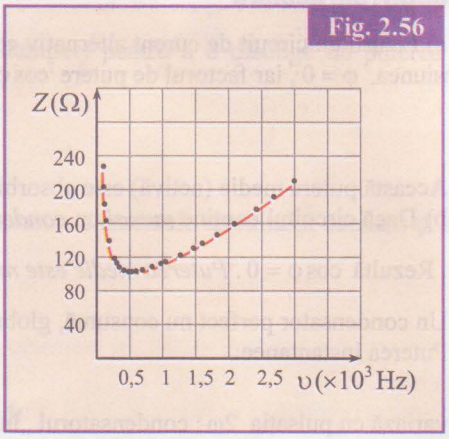
a) Calculați valoarea rezistenței R a circuitului și factorul de calitate, Q.

b) Calculați amplitudinea tensiunii la bornele condensatorului, la rezonanță.

c) Calculați impedanța circuitului la frecvențele ce delimitează banda de trecere.

d) Trasați curba de rezonanță a circuitului serie.

Fig. 2.56



2.2.2 Analiza și descrierea din punct de vedere energetic a funcționării circuitelor de curent alternativ

Fie un circuit serie (R, L, C) alimentat de tensiunea alternativă instantanee:

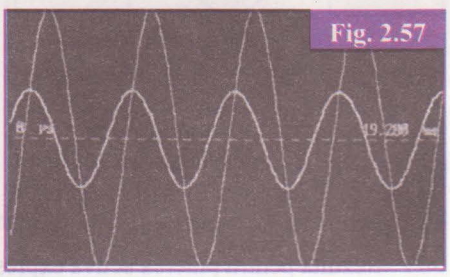
$$u(t) = U\sqrt{2} \cdot \sin \omega t \qquad (1)$$

de valoare eficace U constantă și pulsație ω. Circuitul este parcurs de curentul alternativ sinusoidal a cărui valoare instantanee este:

$$i(t) = I\sqrt{2} \cdot \sin(\omega t + \varphi) \qquad (2)$$

Acesta are aceeași pulsație cu tensiunea, are valoarea eficace I și este defazată față de tensiune cu un unghi φ (fig. 2.57).

Fig. 2.57

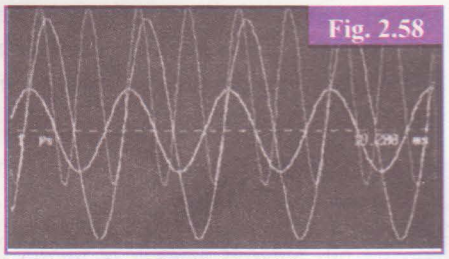


Definim *puterea instantanee* primită de dipolul (R, L, C) serie prin produsul:

$$p(t) = u(t) \cdot i(t) \qquad (3)$$

Efectuând grafic produsul (eventual cu ajutorul unei interfețe) obținem curba din fig. 2.58, care redă variația în timp a puterii.

Fig. 2.58



Se constată că această putere are o valoare medie nenulă (axa orizontală a sinusoidei este situată deasupra axei timpului) și că frecvența sa este dublul frecvenței tensiunii și intensității.

Într-adevăr, înlocuind (1) și (2) în (3) și efectuând calculele, obținem:

$$p(t) = UI\cos\varphi + UI\cos(2\omega t + \varphi) \qquad (4)$$

Puterea instantanee este suma a doi termeni, primul constant în raport cu timpul și celălalt funcție sinusoidală de timp, de pulsație 2ω, deci cu perioada jumătate din cea a tensiunii sau curentului.

Puterea instantanee $p(t)$ arată numai dacă la un moment dat dipolul primeşte energie ($p(t) > 0$) sau cedează energie ($p(t) < 0$).

Puterea medie P consumată de dipol în regim alternativ se obţine prin medierea puterii instantanee pe un interval de timp dat (macroscopic). Matematic, se arată că puterea medie este dată de termenul constant şi pozitiv:

$$< p(t) >= P = UI\cos\varphi \qquad (4')$$

Media pe o perioadă a termenului sinusoidal al puterii instantanee (4) este nulă.

Puterea medie este numită şi ***putere activă*** şi se măsoară în *Watt* când tensiunea eficace U se exprimă în V, iar intensitatea eficace I în A. Factorul **cos φ** este numit **factorul de putere** al dipolului considerat şi este întotdeauna pozitiv (pentru $-\frac{\pi}{2} < \varphi < \frac{\pi}{2}$, $0 < \cos\varphi < 1$).

Puterea medie (activă) se măsoară cu aparatul numit wattmetru (contor casnic) sau cu dispozitive electronice.

Cazuri particulare

a) Pentru un circuit de curent alternativ ce conţine *numai rezistoare* de rezistenţă totală R, curentul este în fază cu tensiunea, $\varphi = 0$, iar factorul de putere $\cos\varphi = 1$. Puterea activă va fi:

$$P = UI = RI^2 = \frac{U^2}{R} \qquad (5)$$

Această putere medie (activă) este absorbită prin efect Joule şi transferată mediului sub formă de căldură.

b) Dacă circuitul conţine *numai* un *condensator* ideal, tensiunea la bornele sale este defazată în urma intensităţii cu $\frac{\pi}{2}$. Rezultă $\cos\varphi = 0$. *Puterea medie este nulă.*

Un condensator perfect nu consumă, global, energie de la generator.

Puterea instantanee:

$$p(t) = UI\sin 2\omega t \qquad (6)$$

variază cu pulsaţia 2ω; condensatorul „înmagazinează" energie în timpul unei jumătăţi de perioadă şi o restituie în semiperioada următoare generatorului.

c) Dacă circuitul conţine *numai* o *bobină ideală* de inductanţă L, tensiunea este în cuadratură avans faţă de curent, deci $\cos\varphi = 0$. *Puterea medie este nulă.* O bobină ideală nu consumă global nici o energie; ea înmagazinează energie magnetică în timp de o semiperioadă şi o restituie generatorului în cursul semiperioadei următoare.

d) Puterea medie (activă) consumată de un *dipol serie (R, L, C)* alimentat de o tensiune alternativă.

Factorul de putere are expresia:

$$\cos\varphi = \frac{R}{Z} \qquad (7)$$

unde

$$Z = \sqrt{R^2 + \left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)^2} \qquad (8)$$

iar

$$U = ZI \qquad (9)$$

Rezultă pentru puterea activă expresia:

$$P = RI^2 \qquad (10)$$

În regim alternativ sinusoidal, *întreaga putere* medie (activă) debitată de generator unui *dipol serie (R, L, C)* este absorbită de *componenta rezistivă a dipolului* prin *efect Joule* şi transferată mediului exterior sub formă de *căldură.*

$$P = UI\cos\varphi = RI^2 \qquad (11)$$

Observaţie

Puterea medie absorbită de dipolul serie (R, L, C) alimentat de un generator de tensiune alternativă sinusoidală de valoare eficace constantă şi de frecvenţă reglabilă depinde de frecvenţa generatorului.

La rezonanţă $\omega_{rez} = \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ puterea activă atinge un maxim:

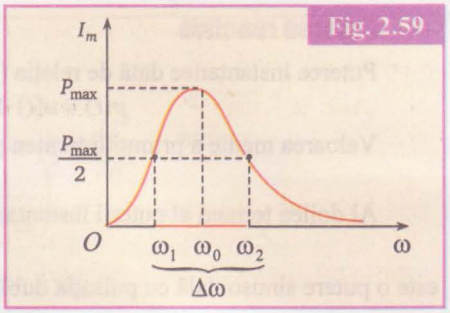
$$P_{max} = RI^2_{max} = \frac{U^2}{R} \qquad (12)$$

Pentru cele două pulsații ω_1 și ω_2 corespunzătoare limitelor benzii de trecere, puterea activă reprezintă jumătate din puterea maximă absorbită la rezonanță (fig. 2.59).

$$P(\omega_1) = P(\omega_2) = \frac{P(\omega_0)}{2} \tag{13}$$

ceea ce corespunde unei diminuări de $\sqrt{2}$ ori a valorii intensității eficace față de cea atinsă la rezonanță:

$$I(\omega_1) = I(\omega_2) = \frac{I(\omega_0)}{\sqrt{2}} \tag{14}$$



Puterea aparentă

Prin definiție, produsul dintre tensiunea eficace la bornele dipolului și intensitatea eficace este numit *putere aparentă*, notată prin S:

$$S = UI \tag{15}$$

În electrotehnică, puterea aparentă este exprimată în VA (voltamper) pentru a o distinge de puterea activă (medie) efectiv consumată, exprimată în watt.

Observați că: $$P = S\cos\varphi \tag{16}$$

Schimburi energetice

Pentru a evidenția schimburile energetice care au loc între generator, elementele circuitului oscilant și mediu, vom porni de la ecuația tensiunilor în regim permanent sinusoidal:

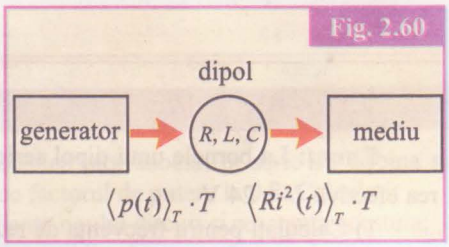
$$u(t) = L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} + Ri + \frac{q}{C} \tag{17}$$

Amplificând-o cu $\mathrm{d}q = i\cdot\mathrm{d}t$, obținem:

$$ui\,\mathrm{d}t = Li\,\mathrm{d}i + \frac{1}{C}q\,\mathrm{d}q + Ri^2\,\mathrm{d}t \tag{18}$$

În membrul I al ecuației (18) am pus în evidență lucrul electric elementar furnizat de generator, exprimat ca produs al puterii instantanee și al intervalului de timp infinitezimal, $\mathrm{d}t$:

$$ui\,\mathrm{d}t = p(t)\cdot\mathrm{d}t = \mathscr{L}_{gen} \tag{19}$$



Membrul II al ecuației conține termenii:

$$Li\,\mathrm{d}i = \mathrm{d}\left(\frac{Li^2}{2}\right) = \mathrm{d}W_{mg} \tag{20}$$

și:

$$\frac{1}{C}q\,\mathrm{d}q = \mathrm{d}\left(\frac{q^2}{2C}\right) = \mathrm{d}W_{el} \tag{21}$$

reprezentând variația elementară a energiei câmpului magnetic din bobină și respectiv a energiei câmpului electric din condensator în același interval de timp.

Suma acestor termeni va avea semnificația variației elementare a energiei totale din elementele reactive ale circuitului:

$$\mathrm{d}W = \mathrm{d}\left(W_{el} + W_{mg}\right) \tag{22}$$

Ultimul termen din membrul II al ecuației (18) reprezintă energia disipată prin efect Joule pe elementul rezistiv al circuitului:

$$\mathrm{d}W_J = Ri^2\cdot\mathrm{d}t \tag{23}$$

Rezultă: $$\mathrm{d}W = p(t)\mathrm{d}t - Ri^2\mathrm{d}t = \mathscr{L}_{gen} - \mathrm{d}W_J \tag{24}$$

Pentru frecvențe diferite de frecvența de rezonanță, lucrul elementar al generatorului este diferit de energia elementară disipată prin efect Joule.

Puterea disipată în rezistență este întotdeauna pozitivă, pe când cea furnizată de generator poate fi atât pozitivă, cât și negativă. În anumite momente, generatorul primește energie de la circuit și aceasta provine din energia înmagazinată în condensator sau în bobină (electromagnetică). *În medie* însă, pentru o perioadă, energia furnizată de generator este întotdeauna egală cu energia medie transferată prin efect Joule în elementul rezistiv.

La rezonanță, puterea instantanee furnizată de generator este constant pozitivă și egală cu cea disipată în rezistența electrică prin efect Joule (fig. 2.60).

Puterea reactivă

Puterea instantanee dată de relaţia (4) se mai poate scrie:

$$p(t) = u(t) \cdot i(t) = UI\cos\varphi(1 - \cos 2\omega t) + UI\sin\varphi \cdot \sin 2\omega t \qquad (25)$$

Valoarea medie a primului termen pe un număr întreg de perioade este egală cu puterea activă:

$$P = UI\cos\varphi$$

Al doilea termen al puterii instantanee:

$$p_2 = UI\sin\varphi\sin 2\omega t \qquad (26)$$

este o putere sinusoidală cu pulsaţia dublă faţă de cea a curentului şi are amplitudinea:

$$Q = UI\sin\varphi \qquad (27)$$

având o valoare medie nulă pe un număr întreg de perioade. Deci, această parte a puterii instantanee nu corespunde unui aport continuu de energie electrică într-un sens dat. Valoarea sa maximă (27) este denumită **putere reactivă**. Ea se poate scrie în general:

$$Q = UI\sin\varphi = I^2X \qquad (28)$$

unde X reprezintă reactanţa circuitului.

Pentru circuitul serie (R, L, C), puterea reactivă are expresia:

$$Q = I^2\left(\frac{1}{C\omega} - L\omega\right) \qquad (29)$$

Puterea reactivă este legată de schimbul oscilant de energie între sursă şi câmpul electric al condensatorului sau câmpul magnetic al bobinei.

Puterea reactivă totală Q a circuitului reprezintă diferenţa dintre puterea reactivă $\frac{I^2}{C\omega}$ a condensatorului şi puterea reactivă a bobinei, ωLI^2. În consecinţă, în funcţie de valorile reactanţelor, puterea reactivă poate fi pozitivă sau negativă.

Puterea reactivă se măsoară în VAR (voltamper reactiv).

Între puterea aparentă, cea activă şi cea reactivă există relaţia:

$$S^2 = P^2 + Q^2 \qquad (30)$$

Exerciţiu aplicativ

Enunţ: La bornele unui dipol serie ($R = 20\ \Omega$, $L = 0{,}5$ H, $C = 5\ \mu$F) se aplică o tensiune sinusoidală cu valoarea efectivă $U = 24$ V.

1) Calculaţi pentru frecvenţa de rezonanţă şi pentru frecvenţa $\upsilon = 50$ Hz a generatorului: intensitatea eficace a curentului; puterea aparentă; puterea medie consumată.

2) Calculaţi frecvenţele pentru care puterea medie este cuprinsă între puterea maximă şi jumătate din aceasta.

3) Exprimaţi în funcţie de factorul de calitate al circuitului raportul dintre energia acumulată în elementele reactive ale circuitului şi energia disipată prin efect Joule într-o perioadă, la rezonanţă.

Soluţie:

1) Rezonanţa se instalează la frecvenţa: $\upsilon = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}} = 100{,}7$ Hz

a) La rezonanţă $Z = R$, iar $I = I_{max} = \frac{U}{R} = \frac{24}{20} = 1{,}2$ A

La frecvenţa $\upsilon = 50$ Hz, $Z = \sqrt{R^2 + \left(2\pi\upsilon L - \frac{1}{2\pi\upsilon C}\right)^2} = 480\ \Omega$, iar $I = \frac{U}{Z} = \frac{24}{480}$ A $= 0{,}05$ A

b) Pentru υ_0, $S = U \cdot I_{max} = 24 \cdot 1{,}2 = 28{,}8$ VA,

iar pentru $\upsilon = 50$ Hz, $S = U \cdot I = 24 \cdot 0{,}05 = 1{,}2$ VA

c) Pentru υ_0, $P = P_{max} = RI_{max}^2 = 20 \cdot (1{,}2)^2 = 28{,}8$ W

iar pentru $\upsilon = 50$ Hz, $P = RI^2 = 20 \cdot (0{,}05)^2$ W $= 0{,}05$ W

2) Fie ω_1 şi ω_2 pulsaţiile pentru care: $\frac{P(\omega_1)}{P_{max}} = \frac{P(\omega_2)}{P_{max}} = \frac{1}{2}$

rezultă $P(\omega_{1,2}) = \frac{P_{max}}{2}$ şi de aici: $RI^2(\omega_{1,2}) = \frac{RI_{max}^2}{2}$, adică $\frac{U^2}{R^2 + \left(L\omega_{1,2} - \frac{1}{C\omega_{1,2}}\right)^2} = \frac{U^2}{2R^2}$

$$\omega_1 = \frac{-RC + \sqrt{R^2C^2 + 4LC}}{2LC} \approx 612{,}8 \text{ rad/s}$$

Găsim:

$$\omega_2 = \frac{RC + \sqrt{R^2C^2 + 4LC}}{2LC} \approx 652{,}8 \text{ rad/s}$$

Frecvenţele corespunzătoare, $\upsilon_1 \cong 97{,}6$ Hz şi $\upsilon_2 \cong 104$ Hz, delimitează banda de trecere $\Delta\upsilon = \upsilon_1 - \upsilon_2 = 6{,}4$ Hz, foarte îngustă (circuit cu selectivitate mare).

3) Energia acumulată în timp de o perioadă în elementele reactive este:

$$W_{reactiv} = \frac{LI_m^2}{2} = LI^2$$

Energia disipată prin efect Joule, într-o perioadă:

$$W_J == RI^2T$$

Raportul energiilor este:

$$\frac{W_{reactiv}}{W_J} = \frac{L}{RT}$$

La rezonanţă, $T = T_0 = 2\pi\sqrt{LC}$. Astfel, raportul devine:

$$\frac{W_{reactiv}}{W_J} = \frac{L}{2\pi R\sqrt{LC}} = \frac{Q}{2\pi}$$

Numeric: $Q = \frac{1}{R}\sqrt{\frac{L}{C}} = 15{,}8$ iar $\frac{W_{reactiv}}{W_J} \cong 2{,}52$

Exerciţii şi probleme propuse

1. Tensiunea instantanee la bornele unui aparat este: $u(t) = 311\sin 100\pi t$ (V).

Intensitatea curentului care traversează aparatul are expresia matematică:

$$i(t) = 2{,}4\sin(100\pi t + 0{,}3) \text{ (A)}$$

Determinaţi:

a) intensitatea şi tensiunea eficace;

b) factorul de putere al circuitului;

c) puterea aparentă;

d) puterea medie consumată;

e) energia consumată, exprimată în J şi kWh, timp de 15 h de funcţionare.

2. Un circuit este constituit dintr-un rezistor şi o bobină de rezistenţă neglijabilă.

(1) Circuitul este alimentat sub o tensiune continuă de 6 V. Intensitatea curentului este 0,2 A.

Circuitul este alimentat apoi sub o tensiune alternativă de valoare eficace 6 V şi de frecvenţă 50 Hz. Intensitatea eficace a curentului este 0,1 A. Calculaţi:

a) factorul de putere şi puterea activă în curent alternativ;

b) reactanţa bobinei şi inductanţa acesteia.

(2) Un condensator asociat în serie cu bobina şi rezistorul aduce factorul de putere la 0,8. Calculaţi:

a) impedanţa noului circuit şi reactanţa acestuia;

b) valorile posibile ale capacităţii condensatorului;

c) puterea medie consumată de circuit, dacă tensiunea eficace la bornele asociaţiei rămâne egală cu 6 V.

3. O bobină de inductanţă $L = 0{,}2$ H are rezistenţa $r = 36\ \Omega$. Tensiunea furnizată de reţea are expresia instantanee:

$$u(t) = 220 \cdot \sqrt{2} \cdot \sin 100\pi t \text{ (V)}.$$

Pentru a evita deteriorarea bobinei, intensitatea eficace a curentului nu trebuie să depăşească 2 A. Pentru aceasta, aveţi de ales între două montaje:

– conectarea în serie cu bobina a unui condensator de capacitate variabilă C;

– conectarea în serie cu bobina a unui rezistor de rezistenţă variabilă R.

(1) Ce condiţii se impun valorilor lui C, respectiv R pentru ca bobina să nu se deterioreze?

(2) Pentru aceeaşi intensitate eficace, comparaţi puterile medii (active) în cele două montaje. Care este montajul mai economic?

4. Un circuit serie cuprinde un rezistor ($R = 6\ \Omega$), o bobină ideală ($L = 20$ mH) şi un condensator ($C = 5\ \mu$F). La bornele sale se aplică tensiunea:

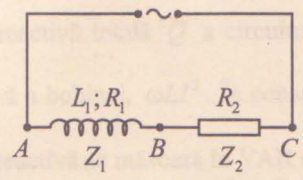
$$u(t) = 24\sqrt{2} \cdot \sin 960\pi t\ (\text{V}).$$

a) Daţi expresia intensităţii instantanee a curentului prin circuit, $i(t)$.

b) Se variază rezistenţa R fără modificarea celorlalţi parametri. Exprimaţi în funcţie de R puterea medie (activă) din circuit. Pentru ce valoare a lui R puterea activă devine maximă?

5. Între punctele A şi B ale circuitului din fig. 2.61 se montează o bobină de impedanţă Z_1, iar între punctele B şi C un rezistor de rezistenţă R_2. Intensitatea instantanee a curentului prin circuit este: $i(t) = I_m \sin(\omega t + \varphi)$, unde ω este pulsaţia generatorului, iar φ – defazajul dintre curent şi tensiunea aplicată.

Fig. 2.61



(1) Un voltmetru de impedanţă mare este conectat succesiv între A şi B, între B şi C şi apoi între A şi C. Acesta indică valorile eficace:

$$U_{AB} = 45\ \text{V},\ U_{BC} = 40\ \text{V şi } U_{AC} = 75\ \text{V}.$$

Arătaţi că factorul de putere al circuitului verifică relaţia:

$$\cos\varphi = \frac{U_{AC}^2 - U_{BC}^2 - U_{AB}^2}{2U_{BC} \cdot U_{AB}}$$

(2) Cunoscând $R_2 = 20\ \Omega$, calculaţi:

a) puterea consumată în rezistorul R_2;

b) puterea consumată în bobină;

c) rezistenţa bobinei.

6. Fie un dipol electric AB a cărui natură exactă nu se cunoaşte; se presupune că dipolul ar putea conţine:

a) o bobină de rezistenţă R şi inductanţă L;

b) un condensator de capacitate C în serie cu un rezistor de rezistenţă R;

c) un rezistor de rezistenţă R.

(1) Se alimentează dipolul sub o tensiune continuă şi se constată că este parcurs de un curent de intensitate constantă. Trageţi concluzii.

(2) Se alimentează acum dipolul de la un generator de tensiune alternativă de frecvenţă $\upsilon = 50$ Hz şi se observă că:

– un wattmetru indică puterea medie $P = 25$ W;

– un ampermetru indică intensitatea eficace $I = 0{,}5$ A;

– un voltmetru conectat la bornele dipolului AB indică tensiunea eficace $U = 100$ V.

Determinaţi elementele componente ale dipolului AB şi valorile lor numerice.

(3) Dipolul AB este montat apoi în serie cu un condensator de capacitate variabilă. Asociaţia este alimentată de aceeaşi tensiune sinusoidală ca la punctul (2).

Calculaţi valoarea capacităţii pentru care tensiunea la bornele dipolului AB şi intensitatea curentului sunt în fază.

2.2.3* Rezolvarea reţelelor de curent alternativ

După cum ştiţi, unei mărimi oscilatorii i se poate asocia un vector rotitor, numit *fazor*, astfel încât valoarea instantanee a mărimii respective se regăseşte în una dintre componentele fazorului pe axele de coordonate.

O formă echivalentă de reprezentare a vectorilor în plan sunt *numerele complexe*.

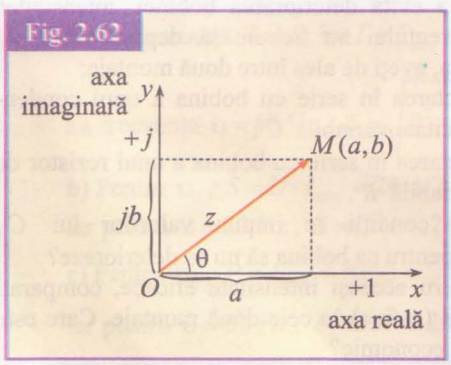
Fie a şi b două numere reale, iar $j^2 = -1$.

Atunci:

$$\underline{z} = a + jb \qquad (1)$$

se numeşte număr complex.

Fig. 2.62



Oricărui număr complex îi corespunde în planul complex (fig. 2.62) un punct $M(a,b)$.

Numărul complex $\underline{z}$ este reprezentat de vectorul $\overrightarrow{OM}$.

Modulul numărului complex $\underline{z}$ este dat de relaţia:

$$|\underline{z}| = z = \sqrt{a^2 + b^2} \qquad (2)$$

Argumentul numărului complex $\underline{z}$ este unghiul θ pe care $\overrightarrow{OM}$ îl face cu axa reală.

Conjugatul numărului complex $\underline{z}$ este:

$$\underline{z}^* = a - jb \qquad (3)$$

Din produsul: $\underline{z}\cdot\underline{z}^{*}=z^{2}$ (4)

obținem: $z=\sqrt{\underline{z}\cdot\underline{z}^{*}}$ (5)

Un număr complex, respectiv conjugatul său pot fi exprimate sub *formă trigonometrică*:

$$\underline{z}=z(\cos\theta+j\sin\theta) \tag{6}$$

$$\underline{z}^{*}=z(\cos\theta-j\sin\theta) \tag{7}$$

Folosind formulele lui Euler:

$$\begin{cases} e^{j\theta}=\cos\theta+j\sin\theta \\ e^{-j\theta}=\cos\theta-j\sin\theta \end{cases} \tag{8}$$

Numărul complex şi respectiv conjugatul său se exprimă *sub formă exponenţială*:

$$\underline{z}=z\cdot e^{j\theta} \tag{9}$$

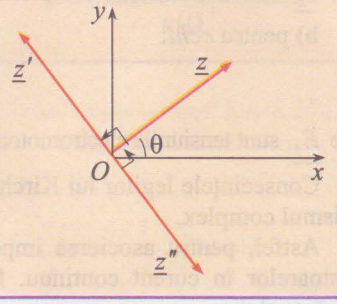
$$\underline{z}^{*}=z\cdot e^{-j\theta} \tag{10}$$

Derivata întâi, respectiv a doua în raport cu argumentul sunt date de:

$$\underline{z}'=\frac{d\underline{z}}{d\theta}=zje^{j\theta}=j\underline{z}=z\left[\cos\left(\theta+\frac{\pi}{2}\right)+j\sin\left(\theta+\frac{\pi}{2}\right)\right] \tag{11}$$

$$\underline{z}''=\frac{d\underline{z}'}{d\theta}=-j\underline{z}=z\left[\cos\left(\theta-\frac{\pi}{2}\right)+j\sin\left(\theta-\frac{\pi}{2}\right)\right] \tag{12}$$

Fig. 2.63



În planul complex, derivata întâi s-ar reprezenta printr-un vector defazat cu $\frac{\pi}{2}$ în avans, iar derivata a doua printr-un vector defazat cu $\frac{\pi}{2}$ în urma vectorului ce reprezintă numărul complex $\underline{z}$ (fig. 2.63).

Pentru studiul circuitelor de curent alternativ se pot asocia intensităţilor, tensiunilor, reactanţelor şi impedanţelor numere complexe. Valorile instantanee ale mărimilor alternative sunt date de partea imaginară sau partea reală a numărului complex asociat.

Exemple:

a) Fie expresia ***intensităţii*** curentului din circuit de forma:

$$i(t)=I\sqrt{2}\cdot\sin(\omega t+\varphi) \tag{13}$$

Numărul complex asociat este:

$$\underline{I}=I\sqrt{2}e^{j(\omega t+\varphi)}=I\sqrt{2}\left[\cos(\omega t+\varphi)+j\sin(\omega t+\varphi)\right] \tag{14}$$

În acest caz:

$$i(t)=\mathrm{Im}\underline{I}=I\sqrt{2}\cdot\sin(\omega t+\varphi) \tag{13'}$$

b) ***Tensiunea*** la bornele circuitului

$$u(t)=U\sqrt{2}\cdot\sin\omega t \tag{15}$$

se asociază cu numărul complex: $\underline{U}=U\sqrt{2}e^{j\omega t}$ (16)

a cărui parte imaginară este tensiunea instantanee.

c) ***Impedanţa complexă*** a circuitului se defineşte prin legea lui Ohm pentru mărimile complexe:

$$\underline{Z}=\frac{\underline{U}}{\underline{I}} \tag{17}$$

Modulul impedanţei complexe va fi:

$$Z=|\underline{Z}|=\frac{U}{I} \tag{18}$$

iar argumentul impedanţei complexe:

$$\arg\underline{Z}=\arg\underline{U}-\arg\underline{I}=\varphi \tag{19}$$

unde φ reprezintă defazajul curent-tensiune. Impedanţa complexă se va scrie:

$$\underline{Z}=Z(\cos\varphi+j\sin\varphi) \tag{20}$$

deci: $\mathrm{tg}\,\varphi=\frac{\mathrm{Im}\,\underline{Z}}{\mathrm{Re}\,\underline{Z}}$ (21)

Cazuri particulare de impedanțe:

a) rezistor de rezistență R : $\underline{Z}_R = \dfrac{\underline{U}_R}{\underline{I}_R} = R$ (22)

b) bobină ideală de inductanță L : $\underline{Z}_L = \underline{X}_L = jX_L = jL\omega$ (23)

c) condensator ideal: $\underline{Z}_C = \underline{X}_C = -jX_C = -j\dfrac{1}{C\omega}$ (24)

Rezolvarea circuitelor de curent alternativ utilizând formalismul complex

Legea lui *Ohm* pentru o porțiune din circuitul de curent alternativ se scrie la fel ca în curent continuu:

$$\underline{I} = \frac{\underline{U}}{\underline{Z}} \tag{25}$$

Legile lui *Kirchhoff* pot fi scrise în complex:

a) pentru *nod*:

$$\underline{I} = \sum_k \underline{I}_k \tag{26}$$

unde $\underline{I}_k$ sunt intensitățile complexe ale curenților care se întâlnesc într-un nod;

b) pentru *ochi*:

$$\sum_j \underline{E}_j = \sum_k \underline{I}_k \underline{Z}_k \tag{27}$$

unde $\underline{E}_j$ sunt tensiunile electromotoare complexe ale generatoarelor, iar $\underline{I}_k \underline{Z}_k$ sunt căderile de tensiune pe laturile ochiului.

Consecințele legilor lui Kirchhoff și Ohm se pot transpune în cazul rețelelor de curent alternativ, utilizând formalismul complex.

Astfel, pentru asocierea impedanțelor vom avea în complex aceleași relații ca pentru asocierea similară a rezistoarelor în curent continuu. Pentru calculul impedanței complexe echivalente *asocierii serie de impedanțe* utilizăm relația:

$$\underline{Z}_s = \sum_k \underline{Z}_k \tag{28}$$

iar pentru calculul impedanței complexe echivalente *asocierii în paralel* a mai multor impedanțe utilizăm:

$$\frac{1}{\underline{Z}_p} = \sum_k \frac{1}{\underline{Z}_k} \tag{29}$$

Aplicații

1. Circuitul serie *(R, L, C)*

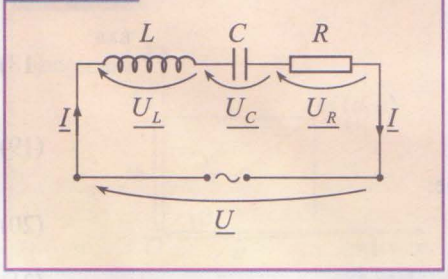
Legea lui Kirchhoff pentru ochiul de rețea se scrie în complex (fig. 2.64)

$$\underline{U} = \underline{U}_L + \underline{U}_C + \underline{U}_R = \underline{X}_L\underline{I} + \underline{X}_C\underline{I} + R\underline{I} = jL\omega\underline{I} - \frac{j}{C\omega}\underline{I} + R\underline{I} = \underline{I}\left[R + j\left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)\right] \tag{30}$$

unde tensiunea complexă se scrie:

$$\underline{U} = U\sqrt{2}e^{j\omega t} \tag{31}$$

Fig. 2.64



iar intensitatea complexă:

$$\underline{I} = I\sqrt{2}e^{j(\omega t - \varphi)} \tag{32}$$

Impedanța complexă a circuitului serie va fi:

$$\underline{Z} = \frac{\underline{U}}{\underline{I}} = R + j\left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right) \tag{33}$$

Modulul său:

$$Z = \sqrt{\underline{Z}\cdot\underline{Z}^*} = \sqrt{R^2 + \left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)^2} \tag{34}$$

iar $\arg\underline{Z} = \varphi$, cu $\operatorname{tg}\varphi = \dfrac{\operatorname{Im}\underline{Z}}{\operatorname{Re}\underline{Z}} = \dfrac{X_L - X_C}{R}$ (35)

2.2.4* Circuitul paralel bobină-condensator. Rezonanța circuitului paralel

Se realizează un dipol AB prin asocierea în paralel a unui condensator de capacitate C şi a unei bobine reale de inductanţă L şi rezistenţă r (fig. 2.65). Se alimentează dipolul de la un generator de tensiune alternativă de valoare eficace U şi pulsaţie ω. Tensiunea este aceeaşi la bornele condensatorului şi ale bobinei:

$$u_C(t) = u_b(t) = u(t) = U\sqrt{2}\sin\omega t \tag{1}$$

Curentul principal $i(t)$ se împarte în nodurile A sau B între cele două ramificaţii:

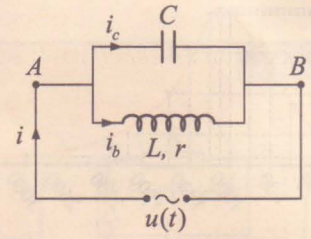
$$i(t) = i_c(t) + i_b(t) \tag{2}$$

Expresia valorii sale instantanee în regim permanent va fi:

$$i(t) = I\sqrt{2}\sin(\omega t - \varphi) \tag{3}$$

unde am notat prin I valoarea sa eficace şi prin φ defazajul dintre tensiune şi curentul principal.

Fig. 2.65



Calculăm impedanţa dipolului derivaţie utilizând formalismul complex:

$$\frac{1}{\underline{Z}} = \frac{1}{r + jL\omega} + jC\omega \tag{4}$$

Obţinem:

$$\underline{Z} = \frac{r + jL\omega}{j\omega C(r + jL\omega) + 1} = \frac{r + jL\omega}{j\omega C\left[r + j\left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)\right]}$$

Notăm prin:

$$X = L\omega - \frac{1}{C\omega} \tag{5}$$

Rezultă:

$$\underline{Z} = \frac{r + jL\omega}{j\omega C(r + jX)}$$

sau, prin amplificare cu conjugatul complex al numitorului:

$$\underline{Z} = \frac{1}{\omega C(r^2 + X^2)}\left[r(\omega L + X) - j(r^2 - \omega LX)\right] \tag{6}$$

Modulul impedanţei este:

$$Z = \frac{1}{\omega C(r^2 + X^2)}\sqrt{r^2(\omega L + X)^2 + (r^2 - \omega LX)^2} \tag{7}$$

Defazajul tensiune-curent este dat de relaţia:

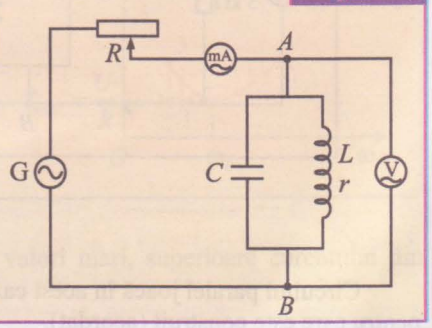
$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{r^2 - \omega LX}{r(\omega L + X)} \tag{8}$$

Studiul rezonanţei circuitului paralel

EXPERIMENT 1

Se realizează montajul din fig. 2.66, unde alimentarea în tensiune se face de la un generator de frecvenţă variabilă. *Intensitatea efectivă I a curentului este menţinută constantă* cu ajutorul rezistenţei variabile R. Valoarea acesteia se alege în funcţie de sensibilitatea miliampermetrului şi a voltmetrului.

Fig. 2.66



Se urmăresc variaţiile tensiunii U la bornele circuitului paralel (dipol AB) în funcţie de frecvenţa generatorului de tensiune.

Se trasează *curba de rezonanţă* $U(\upsilon)$ şi se determină *frecvenţa de rezonanţă*, adică frecvenţa pentru care *valoarea eficace a tensiunii atinge un maxim* (fig. 2.67).

Care este valoarea frecvenţei de rezonanţă în acest caz?

Cum:

$$U(\omega) = I \cdot Z(\omega) \tag{9}$$

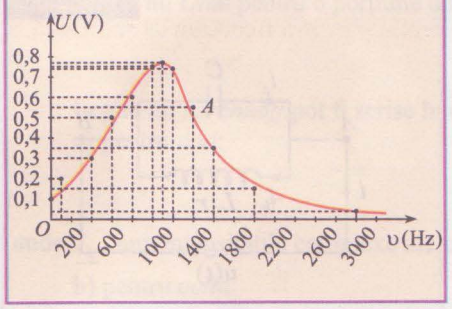
rezultă că rezonanța apare când impedanța circuitului (7) atinge un maxim.
Condiția de rezonanță va fi:

$$\frac{dZ(\omega)}{d\omega} = 0 \tag{10}$$

și este satisfăcută pentru:

$$r^2 - \omega LX = 0 \tag{11}$$

Fig. 2.67



De aici găsim:

$$\omega_{rez} = \sqrt{\frac{1}{LC} + \left(\frac{r}{L}\right)^2} \tag{12}$$

Impedanța la rezonanță va fi pur activă:

$$Z_{rez} = \frac{L}{C \cdot r} = rQ^2 \tag{13}$$

unde Q este factorul de calitate al circuitului.

Dacă rezistența bobinei se micșorează ($r \to 0$), maximul tensiunii eficace tinde spre infinit:

$$U_{max} = \frac{LI}{Cr} \tag{14}$$

Rezultatul teoretic este confirmat de graficul experimental din fig. 2.67. Pentru o bobină cu inductanța $L = 230$ mH și rezistența $r = 100\ \Omega$ și un condensator de capacitate $C = 0{,}15$ μF s-a obținut rezonanța la frecvența $\upsilon_0 \cong 1100$ Hz, menținând intensitatea curentului constantă, $I = 0{,}5$ mA. Corespunzător, $U_{max} \cong 0{,}76$ V.

Din relația (13) găsim factorul de calitate al circuitului: $Q = \sqrt{\frac{U_{max}}{I \cdot r}} = \frac{1}{r}\sqrt{\frac{L}{C}} \cong 4$

Micșorând valoarea capacității (de exemplu $C = 51$ nF sau $C = 7{,}5$ nF) curba de rezonanță $U(\upsilon)$ va avea un maxim mai pronunțat și mai îngust, deci un factor de calitate mai mare.

EXPERIMENT 2

Dacă acum menținem constantă, printr-un montaj potențiometric, valoarea tensiunii U la bornele dipolului, vom constata la rezonanță o scădere a curentului din porțiunea neramificată a circuitului (fig. 2.68). Utilizând aceeași bobină și un condensator de capacitate $C = 0{,}1$ μF, am urmărit variațiile lui I în funcție de frecvența υ a generatorului. Trasarea graficului în scară semilogaritmică este prezentă în fig. 2.69.

Se remarcă anularea curentului pentru frecvența de rezonanță:

Fig. 2.68

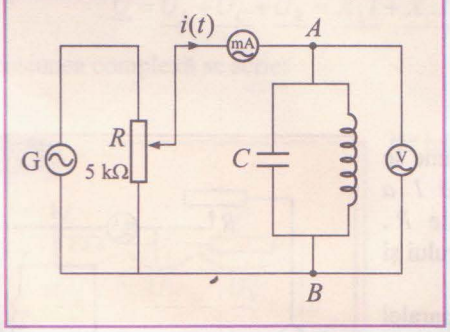
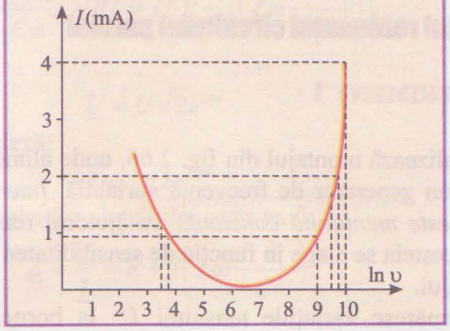


Fig. 2.69



$$\upsilon_{rez} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{1}{LC} + \left(\frac{r}{L}\right)^2} \approx 1200 \text{ Hz}$$

Circuitul paralel joacă în acest caz rol de *filtru*, care nu lasă să treacă o anumită frecvență (aici, cea de 1200 Hz) pentru care este construit (acordat).

Exercițiu aplicativ

Enunț: Fie un dipol constituit prin conectarea în derivație a unei bobine ideale de inductanță L, a unui condensator de capacitate C și a unui rezistor de rezistență R. Se alimentează circuitul de la un generator de tensiune alternativă cu valoarea eficace U constantă și frecvență reglabilă.

a) Construiți diagrama fazorială a intensităților prin ramuri, aplicând teorema I a lui Kirchhoff.

b) Determinați curentul din circuitul neramificat.

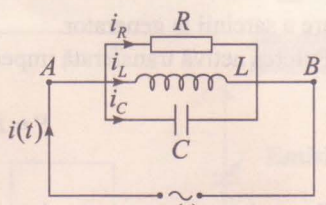
c) Determinați expresia frecvenței de rezonanță și valoarea intensității efective a curentului principal la rezonanță. Trasați curba de rezonanță.

d) Dați expresia valorilor eficace ale curenților prin bobină și condensator la rezonanță și comparați-le cu intensitatea curentului principal. Concluzii.

e) Exprimați puterile activă și aparentă pentru o frecvență dată a generatorului și pentru frecvența de rezonanță.

Soluție: a) Circuitul este reprezentat în fig. 2.70.

Fig. 2.70



Prima teoremă a lui Kirchhoff pentru nodul A (sau B) ne conduce la relația între curenți:

$$i(t) = i_R(t) + i_L(t) + i_C(t)$$

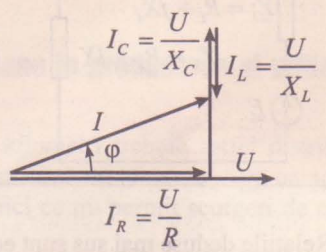
Față de tensiunea $u(t)$, curentul i_C este în avans de fază cu $\frac{\pi}{2}$, curentul i_L este în întârziere de fază cu $\frac{\pi}{2}$, iar curentul i_R este în fază cu aceasta.

Valorile eficace ale curenților se scriu:

$$I_R = \frac{U}{R};\ I_L = \frac{U}{X_L};\ I_C = \frac{U}{X_C}$$

Diagrama fazorială a curenților este redată în fig. 2.71.

Fig. 2.71



Suma lor vectorială este fazorul reprezentând intensitatea curentului principal, defazată cu unghiul φ. față de tensiune.

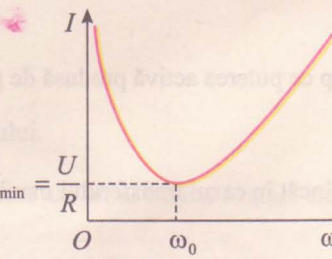
b) Presupunând tensiunea scrisă sub forma: $u(t) = U\sqrt{2}\sin\omega t$ curentul principal va avea valoarea instantanee $i(t) = I\sqrt{2}\sin(\omega t + \varphi)$ unde I și φ se determină din diagrama fazorială:

$$I = U\sqrt{\frac{1}{R^2} + \left(\frac{1}{X_L} - \frac{1}{X_C}\right)^2} = U\sqrt{\frac{1}{R^2} + \left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)^2}$$

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{\frac{1}{X_L} - \frac{1}{X_C}}{\frac{1}{R}} = R\left(\frac{1}{L\omega} - C\omega\right)$$

c) La rezonanță, $I_C = I_L$, iar $\varphi = 0$. Rezultă pulsația de rezonanță $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ pentru care valoarea eficace minimă a intensității curentului principal este: $I_{min} = \frac{U}{R}$.

Fig. 2.72



Curba de rezonanță are aspectul din fig. 2.72.

d) La rezonanță: $I_{L\,rez} = I_{C\,rez} = U\sqrt{\frac{C}{L}}$

Raportul: $\left(\frac{I}{I_L}\right)_{rez} = \frac{1}{R}\sqrt{\frac{L}{C}} = Q$ reprezintă factorul de calitate al circuitului.

Dacă $Q > 1$, intensitățile curenților în elementele reactive pot atinge valori mari, superioare curentului din ramura principală, ceea ce poate prejudicia elementele respective de circuit.

e) Puterea activă pentru orice frecvenţă: $P = UI\cos\varphi = UI\frac{I_R}{I} = \frac{U^2}{R}$ depinde numai de rezistenţa circuitului.

Puterea aparentă depinde de frecvenţă: $S = UI = U^2\sqrt{\frac{1}{R^2} + \left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)^2}$

La rezonanţă ea devine minimă: $S_{\min} = UI_{\min} = \frac{U^2}{R}$, egală cu puterea activă.

Temă. Trataţi aceleaşi chestiuni utilizând formalismul complex!

Notă documentară

Teorema transferului optim de putere în curent alternativ

Dorim să determinăm valoarea impedanţei sarcinii, $\underline{Z_S}$, pentru care un generator de t.e.m. $\underline{E}$ şi impedanţă internă $\underline{Z_i} = R_i + jX_i$ transferă acestei sarcini o putere activă maximă. Altfel spus, vrem să stabilim condiţiile de adaptare a sarcinii la generator.

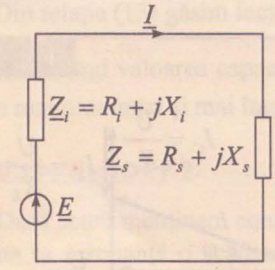
Puterea activă transferată impedanţei de sarcină $\underline{Z_S} = R_S + jX_S$ este dată de relaţia:

$$P = R_S I^2 = R_S \frac{E^2}{\left|\underline{Z_S} + \underline{Z_i}\right|^2} = E^2 \frac{R^2}{\left(R_S + R_i\right)^2 + \left(X_S + X_i\right)^2}$$

Expresia are valoarea maximă în raport cu reactanţele dacă $\left(X_S + X_i\right)^2 = 0$, adică:

$$X_S = -X_i$$

Fig. 2.73



În acest caz, puterea transferată sarcinii are valoarea:

$$P_{X_S = X_i} = E^2 \frac{R_S}{\left(R_S + R_i\right)^2}$$

şi este maximă pentru acea valoare a rezistenţei de sarcină pentru care derivata în raport cu rezistenţa de sarcină, $\frac{dP}{dR_S}$, este egală cu zero.

$$\frac{dP}{dR_S} = \frac{R_S^2 + 2R_S R_i + R_i - 2R_S(R_S + R_i)}{(R_S + R_i)^4} = 0$$

de unde rezultă $R_i^2 = R_S^2$ respectiv $R_i = R_S$.

Relaţiile deduse mai sus sunt echivalente cu $\underline{Z_s} = \underline{Z_i^*}$.

Se poate afirma că *puterea activă transmisă de un generator unui circuit receptor este maximă atunci când impedanţa complexă echivalentă a receptorului este egală cu complex conjugata impedanţei interne complexe a generatorului.* Acesta este enunţul *teoremei transferului maxim de putere.*

Se observă că în cazul în care relaţia de adaptare ($\underline{Z_s} = \underline{Z_i^*}$) este îndeplinită, puterea activă transmisă este:

$$P_{\max} = \frac{E^2}{4R_i}$$

în timp ce puterea activă produsă de generator este:

$$P = (R_S + R_i)I^2 = \frac{E^2}{2R_i} = 2P_{\max}$$

astfel încât în cazul transferului maxim de putere randamentul este:

$$\eta = \frac{P_{\max}}{P} = 0{,}5$$

Această valoare este mult sub necesităţile transmisiei eficiente de energie. În electroenergetică, unde se lucrează cu randamente cât mai mari şi unde în general $R_i \ll R_S$, suntem departe de condiţia de adaptare.

În radioelectronică, unde interesează, în general, să se obţină de la generator maximum de putere activă, se caută să se lucreze în condiţii cât mai apropiate de condiţia de adaptare.

2.2.5 Funcționarea în regim de rezonanță a unor circuite de curent alternativ

Funcționarea circuitelor de curent alternativ în regim de rezonanță este utilizată în circuitele de intrare ale aparatelor de recepție radio și de recepție a semnalelor de televiziune.

Antena (fig. 2.74), elementul care permite captarea undelor electromagnetice pentru un post de o anumită frecvență, este cuplată cu receptorul printr-un circuit acordat ce funcționează în regim de rezonanță. În acest caz transferul semnalului către receptor este la un nivel maxim.

În mod similar, cuplajul dintre antena TV cu receptorul se face printr-un circuit de cuplaj ce funcționează în regim de rezonanță.

La antenele de emisie (fig. 2.75), circuitul de ieșire al emițătorului este acordat la rezonanță cu circuitul antenei. Problema care se impune în acest caz este transferul maxim de putere în antena de emisie, cu respectarea selectivității dorite:

– uniformitate bună în banda de emisie;

– atenuare mare în afara benzii de emisie.

Cuplarea etajelor amplificatoare de radio frecvență din receptoare și emițătoare se realizează tot cu ajutorul unui sistem de circuite oscilante cuplate.

Toate sistemele de emisie și recepție a datelor de telecomunicații, de coordonare a zborului navetelor spațiale, utilizează circuite și sisteme oscilante cuplate.

Sistemele de încălzire prin inducție a unor materiale „termoplaste", ce urmează a fi presate în diverse forme, utilizează circuite oscilante în regim de rezonanță.

Sistemele de compensare a factorului de putere, din întreprinderi, pentru diminuarea pierderilor prin efect Joule, caută să mențină consumul de putere electrică la un $\cos\varphi$ cât mai apropiat de rezonanță cu rețeaua electrică ce alimentează întreprinderea.

Fig. 2.74

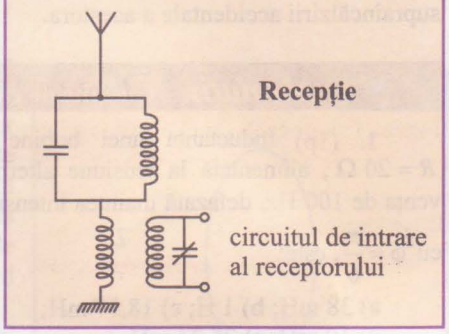
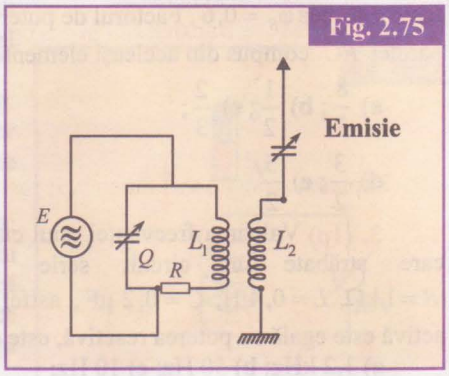


Fig. 2.75



Aplicarea unor măsuri de protecție a mediului și a propriei persoane în producerea și utilizarea curentului alternativ

Liniile de transmisie a energiei electrice la tensiuni de zeci sau sute de kilometri trebuie astfel distribuite, departe de zonele aglomerate, pentru ca prin câmpul electric generat în jurul acestora să nu afecteze viața oamenilor sau animalelor. Cablurile sunt suspendate prin intermediul unor separatori ceramici ce nu permit scurgeri de curent către stâlpii de susținere.

Aparatele și sistemele ce sunt cu înaltă tensiune, trebuie marcate și semnalizate corespunzător, prin plăcuțe avertizoare „Atenție înaltă tensiune, pericol de electrocutare" sau sisteme automatizate ce se declanșează automat în cazul apropierii unor persoane care se pot expune pericolului de electrocutare.

Emițătoarele de mare putere, respectiv antenele ce permit emisia unor puteri mari, sunt încadrate și/ sau izolate în încăperi și perimetre ce îngrădesc accesul în zonă în timpul emisiei. Câmpurile radiante din jurul antenelor pot pune în pericol viața oamenilor sau animalelor din imediata vecinătate a acestora.

Utilizarea în practică a unor aparate și dispozitive ce funcționează sub tensiuni alternative sau cu unde electromagnetice

Utilizarea aparatelor electrocasnice se face conform instrucțiunilor fabricantului.

– Se respectă tensiunea și frecvența de alimentare a aparatului.

– Se verifică dacă priza la care se conectează aparatul este de tip „șuco", adică are un al treilea contact electric care este legat la pământ.

– Carcasa aparatelor electrocasnice este legată obligatoriu la pământ.

– Cuptoarele cu „microunde" se deconectează de sub tensiune în momentul deschiderii ușii de acces în interiorul acestora.

– Se verifică dacă fișele și firele ce se cuplează la priza de 220 V nu prezintă suprafețe neizolate, fisuri sau alte deteriorări de ordin mecanic sau termic.

– Nu este recomandată cuplarea unui consumator electric la sursa de tensiune cu comutatorul aparatului pus pe poziția de „pornit” – există riscul formării unui arc electric între priză și ștecher, care poate duce la scoaterea aparatului din funcțiune sau la alectrocutarea utilizatorului.

– Nu se recomandă lăsarea sub tensiune a consumatoarelor de energie electrică (calorifer, fierbător, mașină automată de spălat, fier de călcat etc.) fără a fi supravegheate, deoarece există riscul declanțării incendiilor, datorită supraîncălzirii accidentale a acestora.

Test sumativ – Circuite de curent alternativ

1. (1p) Inductanța unei bobine cu rezistența $R = 20\ \Omega$, alimentată la tensiune alternativă cu frecvența de 100 Hz, defazată înaintea intensității curentului cu $\varphi = \frac{\pi}{6}$, este:

a) 38 mH; **b)** 1 H; **c)** 18,37 mH;
d) 10 mH; **e)** 25,34 mH.

2. (1p) Factorul de putere al unui circuit RC serie este $\cos\varphi_S = 0,6$. Factorul de putere al circuitului paralel RC compus din aceleași elemente este:

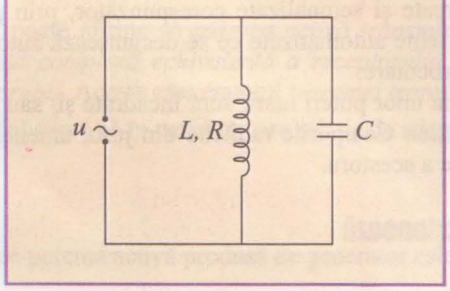
a) $\frac{8}{3}$; **b)** $\frac{1}{2}$; **c)** $\frac{2}{3}$;
d) $\frac{3}{2}$; **e)** $\frac{5}{2}$.

3. (1p) Valoarea frecvenței unui curent alternativ care străbate un circuit serie RLC având $R = 1\ \text{k}\Omega$, $L = 0,4$ H, $C = 0,2\ \mu$F, astfel încât puterea activă este egală cu puterea reactivă, este egală cu:

a) 1,2 kHz; **b)** 50 Hz; **c)** 10 Hz;
d) 796 Hz; **e)** 400 Hz.

4. (2p) În circuitul electric din fig. 2.76, capacitatea condensatorului pentru care intensitatea curentului total este în fază cu tensiunea la bornele circuitului este egală cu:

Fig. 2.76



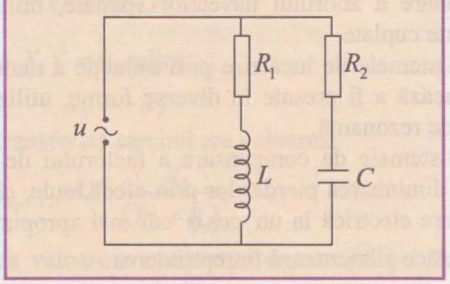
a) $\frac{R^2}{\omega L}$; **b)** $\frac{L^2\omega^2}{R}$; **c)** $\frac{L}{\omega} + R$;
d) $\frac{R^2 + \omega^2 L^2}{R}$; **e)** $\frac{L}{R^2 + \omega^2 L^2}$.

5. (2p) În circuitul din fig. 2.77 se cunosc:
$U = 60$ V, $R_1 = 8\ \Omega$,
$L = 19,1$ mH, $R_2 = 50\ \Omega$,
$C = 31\ \mu$F, $\upsilon = 50$ Hz.

Care este valoarea efectivă a intensității curentului prin sursă?

a) 6,14 A; **b)** 2 A; **c)** 3,14 A;
d) 4,5 A; **e)** 8 A.

Fig. 2.77



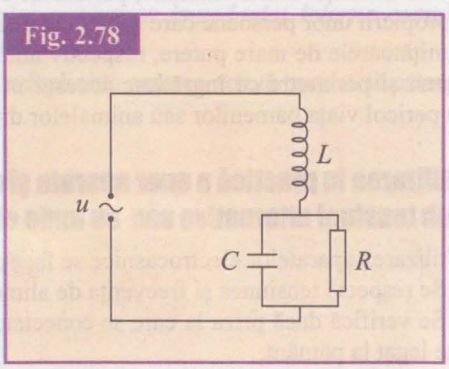
6. (2p) În circuitul din fig. 2.78, pulsația c.a. are valoarea:

$\omega = \frac{1}{\sqrt{LC}}$, $L = 1$ H, $U = 100$ V, $C = 1\ \mu$F.

Intensitatea efectivă a curentului prin rezistor este:

a) 0,1 A; **b)** 1 A; **c)** 100 A;
d) ∞; **e)** 0,01 A.

Fig. 2.78



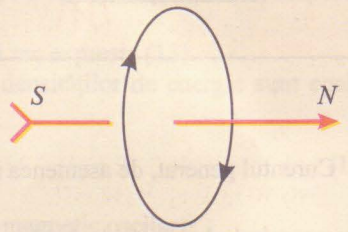
Oficiu: 1p
Total: 10p
Răspunsuri: 1. c; **2.** a; **3.** d; **4.** e; **5.** a; **6.** d.

2.3 CÂMPUL ELECTROMAGNETIC. UNDA ELECTROMAGNETICĂ

2.3.1 Câmpul electromagnetic

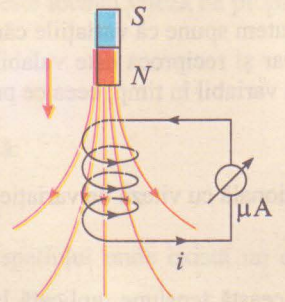
Problema legăturii dintre electricitate şi magnetism i-a preocupat pe fizicienii secolului al XIX-lea. Experimentele lui Oerstedt şi Ampère dovedeau apariţia unui câmp magnetic în vecinătatea unui conductor parcurs de un curent electric. Ampère considera încă din 1819 că toate fenomenele magnetice sunt efecte pur electrice. Chiar magnetismul terestru s-ar datora unor curenţi în interiorul globului pământesc. A rămas celebră în epocă „foiţa lui Ampère", adică spira conductoare parcursă de curent care se comportă ca un magnet extrem de subţire, având polul nord pe una dintre feţe şi sudul pe cealaltă (fig. 2.79).

Fig. 2.79



În 1831, după o multitudine de experimente urmărite cu tenacitate, Michael Faraday descoperă fenomenul de inducţie electromagnetică, ce constă în generarea unei tensiuni electromotoare la bornele unui circuit intersectat de un flux magnetic variabil. Dacă circuitul era închis, prin el trecea un curent electric indus (fig. 2.80).

Fig. 2.80



În 1865, fizicianul scoţian James Clark Maxwell (1831-1879), fig. 2.81, publică celebra teorie a câmpului electromagnetic şi a undelor electromagnetice luminoase, care demonstra identitatea celor două forme de energie: luminoasă şi electromagnetică.

Teoria sa a revoluţionat fizica, deşi se baza pe un suport fals: presupunerea că aceste unde au nevoie pentru a se propaga de un mediu elastic cu proprietăţi stranii, pe care fizicienii îl numeau „eter". Cu toate că teoria „eterului" a fost abandonată de mult, *ecuaţiile lui Maxwell*, ce descriu complet câmpul electromagnetic, au rămas o descoperire *teoretică* de prim rang.

În 1888, Hertz pune în evidenţă propagarea unui câmp electric în spaţiu cu proprietăţi analoage undelor luminoase, verificând astfel teoria lui Maxwell.

Fig. 2.81

Clark Maxwell

Mai mult încă, el face ca undele electrice să interfere, determină ventre şi noduri şi măsoară lungimea lor de undă. Calculând apoi viteza lor de propagare, constată cu stupoare că este egală cu viteza luminii!

Câmpul electromagnetic este caracterizat, într-un punct al spaţiului, prin *suprapunerea unui câmp electric şi a unui câmp magnetic variabile în timp, care se condiţionează şi se generează reciproc*. În fiecare punct al câmpului, asupra corpurilor încărcate sau polarizate electric, a celor polarizate magnetic (de exemplu, ace magnetice sau magneţi permanenţi) sau prin care circulă curent electric, acţionează forţe şi cupluri de forţe determinate de valorile momentane ale componentei electrice $\vec{E}$ şi a celei magnetice $\vec{B}$.

Câmpul electromagnetic este descris complet, într-un punct al spaţiului, de ecuaţiile lui Maxwell. Acestea sunt scrise pentru câmpuri în vid, în prezenţa unei densităţi de sarcină şi a unui curent de conducţie. Prima ecuaţie o constituie legea inducţiei a lui Faraday, care arată că un câmp magnetic variabil în timp generează un câmp electric a cărui variaţie locală este proporţională cu viteza de variaţie a câmpului magnetic şi de sens opus ei.

A doua ecuaţie a lui Maxwell exprimă dependenţa câmpului magnetic de viteza de variaţie a câmpului electric şi de curentul de conducţie sau de viteza de deplasare a unei sarcini electrice în mişcare.

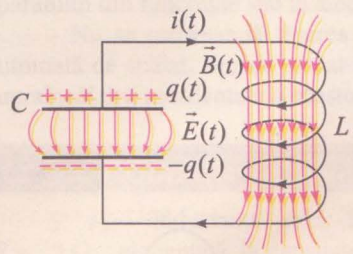
A treia ecuaţie a lui Maxwell este echivalentă legii lui Coulumb. În fine, a patra ecuaţie exprimă faptul că nu există „surse" de câmp magnetic analoage sarcinilor electrice (surse ale câmpului electric), singurele „surse" de câmp magnetic fiind curenţii electrici.

Un exemplu de generare reciprocă a câmpurilor electric şi magnetic îl constituie *circuitul oscilant LC*. Acesta este sediul unor oscilaţii simultane (întreţinute) de curent şi tensiune.

Variaţia sinusoidală a tensiunii la bornele condensatorului:

$$u(t) = U_m \sin \omega t \qquad (1)$$

Fig. 2.82



este datorată unei variații de aceeași formă a câmpului electric, presupus uniform și omogen în fiecare moment, dintre armăturile condensatorului (fig. 2.82).

$$\vec{E}(t) = \vec{E}_m \sin \omega t \tag{2}$$

unde E_m reprezintă amplitudinea oscilațiilor câmpului electric.

$$E_m = \frac{U_m}{d} \tag{3}$$

când condensatorul este plan și d reprezintă distanța dintre armăturile sale.

Variația în timp a câmpului electric generează un curent de conducție prin circuit a cărui intensitate este proporțională cu viteza de variație a sarcinii și implicit a câmpului electric:

$$i(t) = \frac{dq}{dt} \sim \frac{du}{dt} \sim \frac{dE}{dt} \tag{4}$$

Curentul generat, de asemenea sinusoidal:

$$i(t) = I_m \cos \omega t \tag{5}$$

parcurge spirele bobinei ideale L generând în interiorul acesteia un câmp magnetic omogen și uniform în fiecare moment de timp.

$$B(t) = \mu \frac{N}{l} i(t) = B_m \cos \omega t \tag{6}$$

Putem spune că variațiile câmpului electric au condus în acest circuit la apariția unui câmp magnetic variabil.

Dar și reciproca este valabilă. Apariția la nivelul bobinei a unui câmp magnetic variabil dă naștere unui flux propriu variabil în timp, ceea ce produce fenomenul de autoinducție, adică generarea unei t.e.m. la bornele bobinei:

$$e_a = -\frac{d\Phi}{dt} = -L\frac{di}{dt} \tag{7}$$

proporțională cu viteza de variație a câmpului magnetic:

$$e_a \sim -\frac{dB}{dt} \tag{8}$$

Această tensiune, aplicată la bornele condensatorului, generează între armăturile acestuia un câmp electric a cărui intensitate:

$$E(t) = \frac{u_C}{d} = \frac{-e_a}{d} \sim \frac{dB}{dt} \tag{9}$$

este proporțională cu viteza de variație a câmpului magnetic.

Circuitul oscilant LC este sediul unui *câmp electromagnetic* ale cărui componente, electrică $\vec{E}$ și magnetică $\vec{B}$, variabile în timp, nu pot fi concepute separat, căci se condiționează și se generează reciproc.

Din punct de vedere energetic, existența câmpului electromagnetic este determinată în acest caz de un transfer continuu de energie electrică dinspre condensator spre bobină și de energie magnetică dinspre bobină spre condensator, astfel încât energia totală a câmpului electromagnetic să se conserve:

$$W = W_{el}(t) + W_{mg}(t) = \frac{q^2(t)}{2C} + \frac{Li^2(t)}{2} = \text{const.} \tag{10}$$

Să considerăm un circuit oscilant constituit din elemente ideale: condensator plan cu vid și bobină ideală fără miez, în care câmpurile se consideră omogene și uniforme și concentrate în interiorul acestora.

Energia câmpului electric variabil în timp dintre armăturile condensatorului se mai scrie:

$$W_{el}(t) = \frac{q^2(t)}{2C} = C \cdot \frac{u^2(t)}{2} = \frac{\varepsilon_0 S}{2d} \cdot E^2(t) \cdot d^2 = \frac{\varepsilon_0 E^2(t)}{2} \cdot S \cdot d = \frac{\varepsilon_0 E^2(t)}{2} \cdot V$$

unde V reprezintă volumul ocupat de liniile de câmp.

Densitatea de energie a acestuia va fi:

$$w_{el} = \frac{W_{el}}{V} = \frac{\varepsilon_0 E^2(t)}{2} \tag{11}$$

În mod analog, energia câmpului magnetic cu sediul în interiorul bobinei ideale cu N spire, lungimea l și aria unei spire S, este:

$$W_{mg}(t) = \frac{Li^2(t)}{2} = \mu_0 \frac{N^2 S}{2l} i^2(t) = \frac{\mu_0^2 N^2 i^2(t)}{l^2} \cdot \frac{S \cdot l}{2\mu_0} = \frac{B^2(t)}{2\mu_0} \cdot V$$

unde $V = S \cdot l$ reprezintă volumul bobinei.

Astfel, densitatea de energie magnetică devine:

$$w_{mg} = \frac{B^2(t)}{2\mu_0} \tag{12}$$

Densitatea totală de energie a câmpului electromagnetic din circuitul oscilant LC va fi:

$$w = w_{el} + w_{mg} = \frac{1}{2}\left(\varepsilon_0 E^2(t) + \frac{1}{\mu_0} B^2(t)\right) \tag{13}$$

Rezultatele (12) şi (13) se generalizează pentru orice punct din spaţiu în care există un câmp electric, respectiv magnetic variabile.

În punctul în care există un câmp electromagnetic, densitatea de energie totală are expresia (13).

Veţi remarca, drept consecinţă a legii de conservare (10), că amplitudinile densităţilor de energie sunt egale. Deci:

$$\frac{1}{2}\varepsilon_0 E_m^2 = \frac{1}{2\mu_0} B_m^2 \tag{14}$$

De aici relaţia între amplitudinile celor două componente ale câmpului electromagnetic oscilant:

$$E_m = \frac{B_m}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}} \tag{15}$$

Veţi fi poate surprinşi când veţi calcula coeficientul de proporţionalitate; acesta este tocmai viteza de propagare a luminii în vid:

$$\frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}} = c \approx 300\,000 \ \frac{\text{km}}{\text{s}} \tag{16}$$

Deci, componenta magnetică a câmpului este de c ori mai mică decât cea electrică:

$$B_m = \frac{E_m}{c} \tag{17}$$

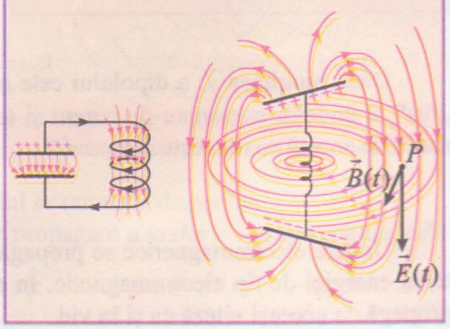
Dar de existenţa ei depinde apariţia componentei electrice în orice punct al spaţiului unde există un câmp electromagnetic.

2.3.2 Propagarea câmpului electromagnetic

În paragraful precedent ne-am ocupat de energia câmpului electromagnetic concentrat într-un circuit oscilant LC.

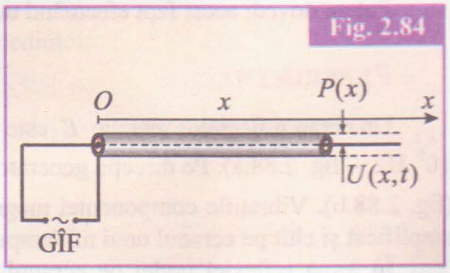
Pentru a transmite energie în spaţiu este nevoie de un circuit oscilant deschis, astfel încât liniile de câmp să se întindă în spaţiul înconjurător. Imaginaţi-vă că armăturile condensatorului s-ar îndepărta progresiv una de cealaltă; liniile câmpului electric ar căpăta o dispersie spaţială din ce în ce mai mare. Dacă simultan firul conductor din care sunt confecţionate înfăşurările bobinei ar fi întins, liniile câmpului magnetic s-ar distribui într-o regiune a spaţiului din ce în ce mai mare (fig. 2.83).

Fig. 2.83



În fiecare punct P al spaţiului înconjurător, câmpul electromagnetic s-ar caracteriza prin componentele sale $\vec{E}(t)$ şi $\vec{B}(t)$ variabile în timp şi perpendiculare una pe cealaltă.

Fig. 2.84



Inductanţa proprie L şi capacitatea C ale circuitului oscilant deschis sunt distribuite pe toată lungimea firului conductor.

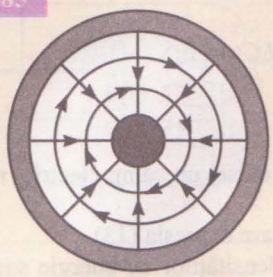
Un cablu coaxial alcătuit dintr-un fir conductor central şi un conductor cilindric dispus coaxial în jurul firului (fig. 2.84) permit transmiterea în spaţiu a energiei electromagnetice, cu o viteză finită.

Vom presupune că acest cablu este infinit lung şi elementele sale au rezistenţă nulă. Între capetele celor doi conductori ce constituie cablul se instalează un generator de semnal sinusoidal (de frecvenţă de ordinul a câtorva sute de MHz). Cablul coaxial devine sediul propagării unei unde de tensiune şi simultan a unei unde de curent sinusoidale, progresive.

La nivelul unui punct situat la distanța x de generator între cele două elemente ale cablului există tensiunea

$$U(x,t) = U_m \sin 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x}{c \cdot T}\right) \quad (1)$$

Fig. 2.85



și circulă curentul de intensitate:

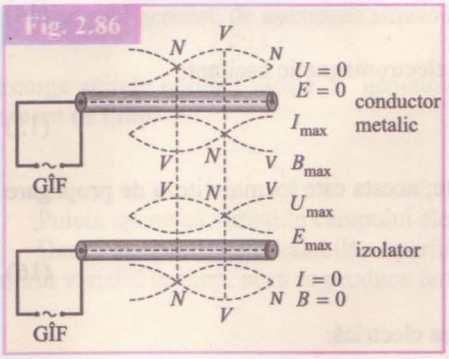
$$i(x,t) = I_m \sin 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x}{c \cdot T}\right) \quad (2)$$

Viteza de propagare a acestor unde este egală cu viteza de propagare a luminii, c, iar lungimea lor de undă are valoarea:

$$\lambda = c \cdot T = \frac{c}{\upsilon} \quad (3)$$

La nivelul fiecărei secțiuni a cablului am reprezentat (fig. 2.85) liniile câmpurilor electric (radiale) și magnetic (circulare) la un moment dat.

Fig. 2.86

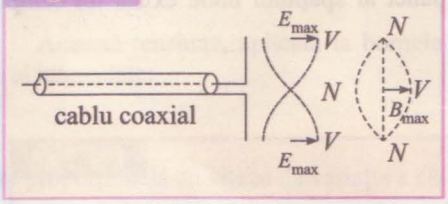


Dacă linia de transmisie constituită din cablul coaxial se termină printr-un obstacol (de exemplu un contact metalic între elemente sau un izolator), în linie iau naștere unde staționare de curent și tensiune și respectiv unde electromagnetice staționare, caracterizate prin ventre și noduri (fig. 2.86).

Unui ventru al intensității câmpului electric (ce corespunde unui ventru pentru tensiunea dintre conductori) îi corespunde un nod pentru inducția magnetică (determinat de apariția unui nod al intensității curentului pe linie).

Distanța dintre două noduri consecutive sau două ventre consecutive reprezintă jumătate din lungimea de undă.

Fig. 2.87



Pentru ca linia de transmisie electromagnetică (în speță cablul coaxial) să permită energiei să treacă în spațiul exterior, adică să fie radiată și să genereze o undă progresivă în spațiul liber, ea se termină cu doi conductori dispuși ca în fig. 2.87. Aceștia constituie o *antenă dipol electric*. Diferența de potențial dintre cei doi conductori variază sinusoidal după cum unda ajunge la ei, efectul fiind cel al unui dipol electric al cărui moment dipolar $\vec{p}$ variază în timp. Liniile componentei electrice $\vec{E}$ a câmpului electromagnetic formează contururi închise ce se îndepărtează de dipol cu viteza c. Simultan se generează un câmp magnetic cu linii de câmp închise ce se propagă cu aceeași viteză. Aceste câmpuri formează *radiația electromagnetică*.

Dacă lungimea l a dipolului este astfel calculată încât pentru frecvența de oscilație respectivă să formeze un „fus" al undelor staționare de curent și tensiune (respectiv electromagnetice), puterea radiantă a dipolului crește. O astfel de antenă se numește *semiundă*:

$$l = \frac{\lambda}{2} \quad (4)$$

Undele electromagnetice se propagă în vid (mediul intragalactic) fără un suport material, ci doar prin transmiterea energiei de tip electromagnetic. În atmosfera terestră (aer), cu excepția ionosferei, undele electromagnetice se propagă cu aceeași viteză ca și în vid.

Putem dovedi acest fapt efectuând următorul experiment:

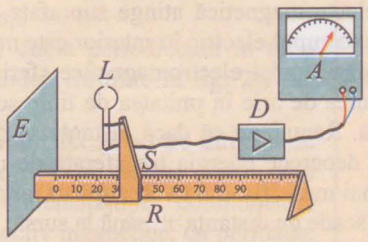
EXPERIMENT

Un ecran reflectător metalic E este așezat în fața antenei unui generator de microunde (cu frecvența de ordinul 10^9 Hz – fig. 2.88.a). Pe direcția generator-ecran se plasează un dipol detector al componentei magnetice a câmpului (fig. 2.88.b). Vibrațiile componentei magnetice $\vec{B}$ induc în bucla (L) un curent ce este detectat de dioda D, apoi amplificat și citit pe ecranul unui miliampermetru (fig. 2.89).

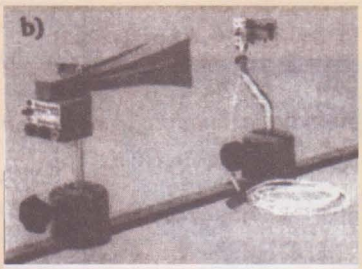
În urma reflexiei undei pe ecranul metalic E se formează unde staționare. Prin deplasarea detectorului pe direcția generator-ecran se observă succesiv noduri și ventre ale inducției magnetice traduse prin minime și maxime ale intensității curentului detectat.

Fig. 2.88

a)



b)



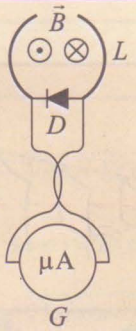
Se verifică echidistanța nodurilor și cea a ventrelor consecutive prin măsurători pe bancul gradat. Pentru frecvența $\upsilon = 1500$ MHz a generatorului, am găsit că ventrele sunt situate la distanța medie $d = 10$ cm unul de celălalt.

Deducem de aici lungimea de undă în vid: $\lambda = 2d = 20$ cm .

În consecință, viteza de propagare a undelor electromagnetice este în aer (vid):

$$c = \lambda \cdot \upsilon = 0{,}2 \text{ m} \cdot 1500 \cdot 10^6 \text{ Hz} = 3 \cdot 10^8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1} = 300\,000 \text{ km} \cdot \text{s}^{-1}.$$

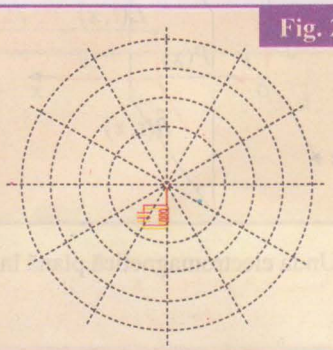
Fig. 2.89



2.3.3 Unda electromagnetică plană. Utilizarea relațiilor dintre mărimile caractristice

Un circuit oscilant LC în care au loc oscilații electromagnetice cu frecvența proprie $\upsilon_0 = \dfrac{1}{2\pi\sqrt{LC}}$, și căruia i se atașează o antenă dipol ce radiază în spațiu energia câmpului electromagnetic constituie sursa unei *unde electromagnetice* sferice. Viteza de propagare a undei este aceeași în toate direcțiile, dacă mediul este vidul sau un mediu material omogen transparent pentru frecvența respectivă (fig. 2.90).

Fig. 2.90



În orice mediu omogen dielectric transparent, viteza de propagare v este mai mică decât în vid ($v < c$). Raportul supraunitar:

$$\frac{c}{v} = n \qquad (1)$$

definește *indicele de refracție al mediului* respectiv.

Dacă indicele de refracție al mediului depinde de frecvența undei, mediul se numește dispersiv.

Teoria lui Maxwell arată că într-un mediu dielectric omogen viteza de propagare a undei electromagnetice este dată de relația:

$$v = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon\mu}} \qquad (2)$$

unde ε este permitivitatea dielectrică, iar μ – permeabilitatea magnetică a mediului.

Cum $\varepsilon = \varepsilon_r \cdot \varepsilon_0$ și $\mu = \mu_r \cdot \mu_0$, relația (2) devine:

$$v = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0\mu_0\varepsilon_r\mu_r}} = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon_r\mu_r}} \qquad (3)$$

Rezultă pentru indicele de refracție al mediului:

$$n = \sqrt{\varepsilon_r\mu_r} \qquad (4)$$

Deoarece pentru majoritatea dielectricilor $\mu_r \cong 1$, indicele de refracție devine:

$$n \cong \sqrt{\varepsilon_r} \qquad (5)$$

Fig. 2.91

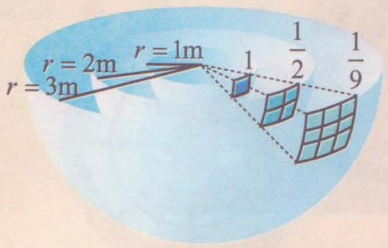


Fig. 2.92

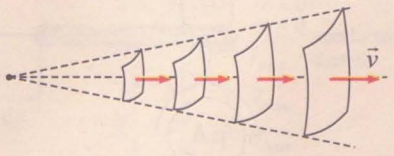
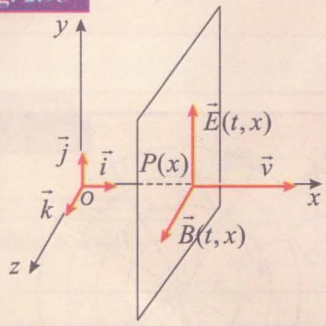


Fig. 2.93



Observații

1. Undele electromagnetice nu se pot propaga într-un mediu conductor, deoarece câmpul $\vec{E}$ generează curenți prin care energia undei este disipată. Când o undă electromagnetică atinge suprafața unui conductor ideal, este total reflectată (câmpul electric în interior este nul).

2. În timpul propagării undei electromagnetice sferice, fluxul energetic transferat prin unitatea de arie în unitatea de timp scade cu pătratul distanței r până la sursă. Remarcați că dacă distanța se dublează, fluxul energetic scade la sfert, deoarece energia transferată de undă se repartizează unei arii de 4 ori mai mari (fig. 2.91). Rezultă că amplitudinea undei electromagnetice sferice scade cu distanța r până la sursă:

$$E_m(r) = \frac{E_{m0}}{r},\ B(t) = \frac{B_{m0}}{r}$$

unde E_{m0}, B_{m0} sunt amplitudinile câmpului la nivelul sursei.

La distanțe mari de sursă și pentru regiuni limitate din suprafețele de undă, acestea pot fi aproximate cu porțiuni de plane paralele, perpendiculare pe direcția de propagare. Putem vorbi astfel de o *undă electromagnetică plană*. În mod ideal, la nivelul oricărui front de undă plan, amplitudinea componentei electrice și respectiv magnetice a câmpului sunt aceleași.

Undele electromagnetice sunt unde *transversale*; în fiecare punct al mediului, atât componenta electrică $\vec{E}$, cât și cea magnetică $\vec{B}$ ale câmpului electromagnetic sunt perpendiculare pe direcția de propagare și totodată perpendiculare una pe cealaltă. Triedrul $\vec{v}$, $\vec{E}$, $\vec{B}$ este direct (ca și $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ – versorii axelor).

Fie Ox una dintre direcțiile de propagare a unei unde electromagnetice plane. Fronturile de undă plane vor fi paralele cu planul yOz (fig. 2.93).

Vectorii câmp electric $\vec{E}$ și magnetic $\vec{B}$ *oscilează în fază*, în lungul axelor Oy și respectiv Oz.

Presupunem că la momentul t, oscilația electromagnetică la nivelul frontului de undă $x = 0$ (în originea O a axelor), este de forma:

$$\begin{cases} \vec{E}(t) = \overrightarrow{E_m} \sin \omega t \\ \vec{B}(t) = \overrightarrow{B_m} \sin \omega t \end{cases} \quad (6)$$

unde $\omega = 2\pi\upsilon$ este pulsația sursei.

Unda electromagnetică plană în punctul P de abscisă x va fi, la același moment de timp t, defazată cu:

$$\varphi = 2\pi\frac{\tau}{T} \quad (7)$$

unde:

$$\tau = \frac{x}{v} \quad (8)$$

este intervalul de timp necesar propagării undei de la O până la P, iar T – perioada oscilației electromagnetice.

Componentele câmpului în punctul $P(x)$ sunt:

$$\begin{aligned} \vec{E}(x,t) &= \overrightarrow{E_m} \sin\left(\omega t - 2\pi\frac{x}{vT}\right) \\ \vec{B}(x,t) &= \overrightarrow{B_m} \sin\left(\omega t - 2\pi\frac{x}{vT}\right) \end{aligned} \quad (9)$$

Definind lungimea de undă a undei respective prin relația:

$$\lambda = vT \quad (10)$$

și înlocuind în (9) obținem:

$$\begin{cases} \vec{E}(x,t) = \overrightarrow{E_m} \sin 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right) \\ \vec{B}(x,t) = \overrightarrow{B_m} \sin 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right) \end{cases} \quad (11)$$

Relaţiile (11) constituie *ecuaţiile undei electromagnetice plane* de frecvenţă $\upsilon = 1/T$ ce se propagă după direcţia Ox într-un mediu omogen şi izotrop.

Remarcaţi dubla periodicitate în timp şi în spaţiu a undei, ilustrate în fig. 2.94 şi respectiv 2.95.

Un observator fix situat pe direcţia de propagare poate detecta variaţii sinusoidale în timp ale intensităţilor componentei electrice şi respectiv magnetice, cu perioada: $T = \frac{1}{\upsilon}$, unde υ – frecvenţa generatorului de oscilaţii electromagnetice.

O „fotografie" a mediului de propagare la un moment de timp dat pune în evidenţă faptul că *în puncte separate printr-o distanţă egală cu lungimea de undă sau un multiplu întreg al lungimii de undă (λ), oscilaţiile câmpului electromagnetic sunt în fază.*

Spre exemplu:

$$\vec{E}(x_A) = \vec{E}(x_D) \text{ şi } \vec{B}(x_A) = \vec{B}(x_D) \quad (12)$$

dacă

$$\Delta x = x_D - x_A = k\lambda,\ k \in \mathbb{N} \quad (13)$$

Într-adevăr, defazajul

$$\Delta\varphi = 2\pi\frac{\Delta x}{\lambda} = 2\pi k,\ k \in \mathbb{N} \quad (14)$$

este fie nul, fie multiplu întreg de 2π, ceea ce implică egalităţile (12).

Fig. 2.94

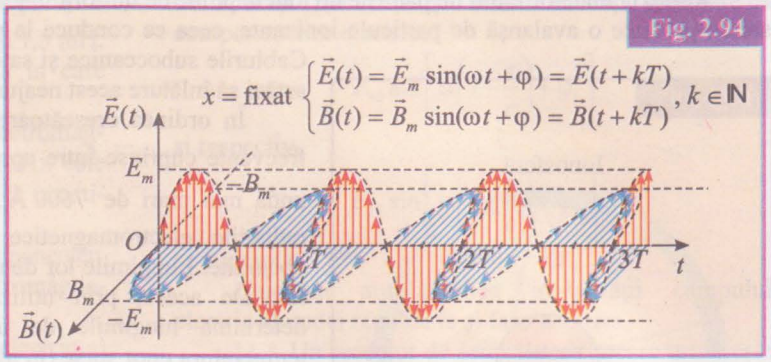
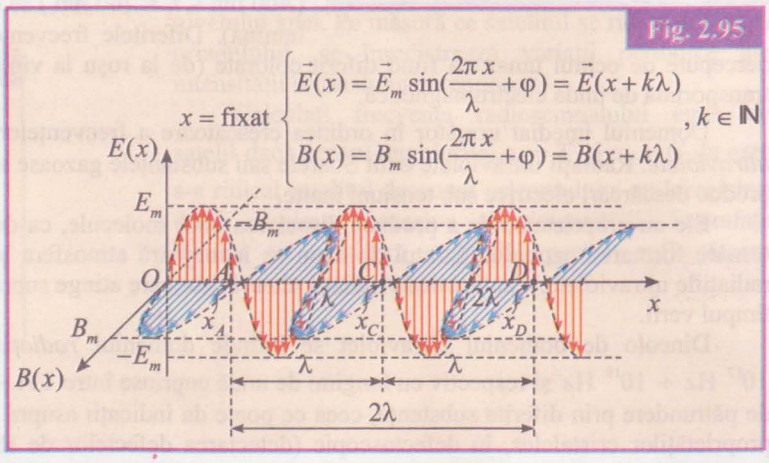


Fig. 2.95

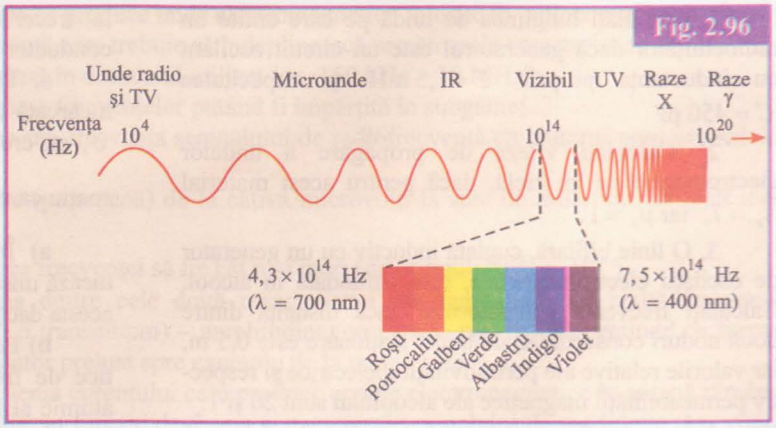


2.4 CLASIFICAREA UNDELOR ELECTROMAGNETICE

Criteriul unic de clasificare a undelor electromagnetice este cel al frecvenţei acestora, respectiv al lungimii lor de undă. Pe măsură ce frecvenţa undei este mai înaltă, lungimea ei de undă este mai mică: $\lambda = \frac{c}{\upsilon}$.

În fig. 2.96 aveţi redată schematic o clasificare a radiaţiilor electromagnetice pe domenii de frecvenţe (lungimi de undă), precum şi în funcţie de sursele undelor respective (emiţători radio şi TV, generatori microunde, surse luminoase, surse UV, surse cuantice: raze X şi γ).

Fig. 2.96

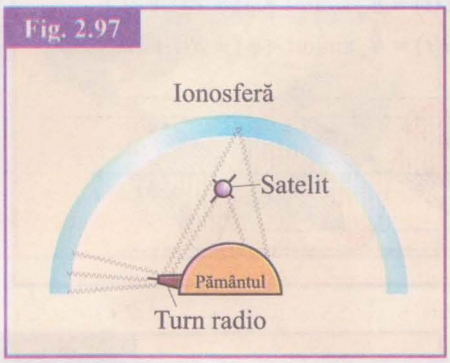


Undele cu frecvenţele cuprinse între aprox. 10^3 Hz şi aprox. 10^{12} Hz poartă numele de *unde hertziene* (unde radio) şi servesc la transmiterea informaţiilor prin radio şi TV. După lungimile lor de undă, sunt: unde lungi L ($\lambda \sim 1$ km), medii M ($\lambda \sim 100$ m), scurte S ($\lambda \sim 1$ m), ultrascurte US ($\lambda \sim 1$ dm) şi microundele ($\lambda \sim 1$ cm $\div 1$ mm).

Undele radio, care se propagă în linie dreaptă, sunt reflectate de ionosferă (70-80 km altitudine).

Reflexia undelor radio de păturile de ioni depinde de uniformitatea densității acestora. Orice creștere a activității solare produce o avalanșă de particule ionizante, ceea ce conduce la perturbări ale comunicațiilor prin unde radio. Cablurile suboceanice și sateliții de telecomunicații (radio și TV) reușesc astăzi să înlăture acest neajuns (fig. 2.97).

Fig. 2.97



În ordinea crescătoare a frecvenței urmează undele *infraroșii,* cu frecvențe cuprinse între aprox. 10^{11} și 10^{14} Hz (respectiv cu lungimi de undă mai mari de 7600 Å, până la aproximativ 300 μ). Acestea sunt radiațiile electromagnetice emise de corpurile aflate la temperaturi obișnuite. Lungimile lor de undă sunt invers proporționale cu temperatura lor. De aceea, prin utilizarea unui spectrometru în infraroșu, care determină lungimile de undă ale radiațiilor emise, se poate afla temperatura unor surse (în meteorologie).

În jurul frecvenței de 10^{14} Hz, într-un domeniu extrem de îngust ($400\ \text{nm} < \lambda < 700\ \text{nm}$) se situează *radiațiile vizibile* (domeniul optic sau lumina). Diferitele frecvențe (lungimi de undă) din acest domeniu sunt percepute de ochiul uman ca fiind diferit colorate (de la roșu la violet), iar strălucirea culorii depinde de energia transportată de unda electromagnetică.

Domeniul imediat următor în ordinea crescătoare a frecvențelor (10^{15} Hz ÷ 10^{17} Hz) corespunde radiațiilor *ultraviolete*. Radiații ultraviolete emit Soarele sau substanțele gazoase aflate la temperaturi foarte înalte sau în care se produc descărcări electrice sub tensiuni înalte.

Ele au proprietatea de a produce disocierea unor molecule, ca de exemplu disocierea oxigenului, având drept urmare formarea ozonului. Stratul de ozon ce înconjoară atmosfera la înălțimea de cca. 30 km absoarbe puternic radiațiile ultraviolete. Cantitatea de radiații ultraviolete care atinge suprafața Pământului are drept efect bronzarea din timpul verii.

Dincolo de domeniul ultraviolet se întinde domeniul *radiațiilor X* (Röentgen) cu frecvențe de ordinul 10^{17} Hz ÷ 10^{19} Hz și respectiv cu lungimi de undă cuprinse între 1 Å ÷ 100 Å. Este binecunoscută puterea lor mare de pătrundere prin diferite substanțe, ceea ce poate da indicații asupra naturii acestora. Sunt utilizate în investigarea proprietăților cristalelor, în defectoscopie (detectarea defectelor de structură ale unor materiale) și în biologie și medicină (radiografii, radioscopii).

În fine, radiațiile cu frecvențe mai mari de 10^{20} Hz (lungimi de undă sub 1 Å) sunt numite *radiații* γ. Ele însoțesc tranzițiile nucleelor atomice de pe un nivel superior pe unul inferior de energie sau frânarea unor particule rapide, încărcate electric, la trecerea printr-o substanță. De asemenea apar ca urmare a proceselor de dezintegrare radioactivă a unor nuclee. Sunt puternic absorbite și atenuate de substanțele prin care trec. În cantitate mare sunt nocive ființelor vii.

Exerciții și probleme propuse

1. Calculați lungimea de undă pe care emite un radioemițător dacă generatorul este un circuit oscilant cu inductanța proprie $L = 1{,}5$ mH și capacitatea $C = 450$ pF.

2. Calculați viteza de propagare a undelor electromagnetice în sticlă, dacă pentru acest material $\varepsilon_r = 7$, iar $\mu_r = 1$.

3. O linie bifilară, cuplată inductiv cu un generator de oscilații electromagnetice, este cufundată în alcool. Calculați frecvența generatorului dacă distanța dintre două noduri consecutive ale undei staționare este 0,5 m, iar valorile relative ale permitivității dielectrice și respectiv permeabilității magnetice ale alcoolului sunt 26 și 1.

4. În ce condiții o particulă încărcată radiază o undă electromagnetică, dacă se mișcă cu viteză constantă?

5. Conform teoriei lui Maxwell, o particulă încărcată electric ce se mișcă accelerat radiază unde electromagnetice. Se pot genera unde electromagnetice la trecerea unui curent electric continuu printr-un conductor circular (spiră)? De ce?

6. Teoria maxwelliană arată că dacă o particulă încărcată efectuează o mișcare armonică cu frecvența υ, ea crează un câmp electromagnetic ce radiază în spațiu ca undă, cu lungimea de undă $\lambda = \frac{c}{\upsilon}$.

a) Într-un radioemițător sarcinile electrice efectuează mișcări armonice în antenă. Pe ce frecvență emite acesta dacă lungimea dipolului antenei este de 5 cm?

b) Pentru a explica emisia undelor electromagnetice de frecvențe înalte se poate recurge la modelul atomic al lui Rutherford (planetar). Calculați frecvența mișcării electronului în atomul de hidrogen și apreciați lungimea de undă a radiației emise. Cărui domeniu din spectru îi corespunde aceasta? Se cunoaște $r = 0{,}53$ Å raza orbitei electronului.

7. Circuitul oscilant al unui generator de unde radio posedă un condensator de capacitate $C = 500$ pF şi o bobină a cărei inductanţă variază între 0,5 mH şi 1,5 mH.

Calculaţi domeniul lungimilor de undă în care poate emite circuitul.

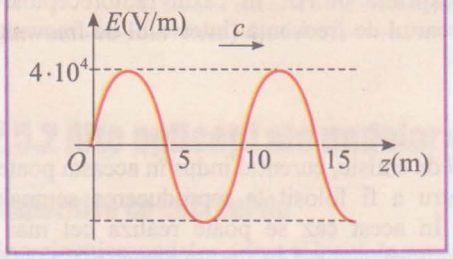
8. Direcţia de propagare a unei unde electromagnetice plane sinusoidale cu frecvenţa 300 MHz este perpendiculară pe o suprafaţă metalică plană ce constituie o „oglindă reflectătoare".

Calculaţi poziţiile nodurilor şi ventrelor componentei:

a) electrice; **b)** magnetice a undei electromagnetice faţă de placa metalică.

9. În fig. 2.98 este reprezentat câmpul electric al unei unde plane sinusoidale la momentul $t = 0$, ce se propagă în lungul axei Oz, în vid. Scrieţi ecuaţia undei electromagnetice plane.

Fig. 2.98



10. Două unde electromagnetice plane coliniare, de aceeaşi frecvenţă şi având aceeaşi orientare a componentelor electrice:

$$E_{10} \sin\left[\omega\left(t - \frac{z}{c}\right) + \varphi_1\right]$$

şi respectiv

$$E_{20} \sin\left[\omega\left(t - \frac{z}{c}\right) + \varphi_2\right]$$

se suprapun.

Calculaţi amplitudinea intensităţii câmpului electric al undei rezultante şi faza acesteia.

11.* Un receptor de semnale radio care urmăreşte apariţia unui satelit al Pământului la orizont este situat pe malul unui lac la înălţimea $H = 3$ m deasupra nivelului apei. Pe măsură ce satelitul se ridică deasupra orizontului, se înregistrează variaţii periodice ale intensităţii semnalului recepţionat.

Calculaţi frecvenţa radiosemnalului emis de satelit dacă pentru unghiurile $\alpha_1 = 3^\circ$ şi $\alpha_2 = 6^\circ$ la care s-a ridicat satelitul deasupra orizontului s-au înregistrat două maxime succesive ale intensităţii. Suprafaţa lacului se consideră „oglindă" perfect reflectătoare pentru unda electromagnetică.

2.5 Aplicaţii

2.5.1 Explicarea calitativă a utilizării undelor electromagnetice în funcţionarea radioului şi televiziunii

Pentru a construi un sistem de emisie-recepţie sunt necesare două sisteme electronice distincte.

Radioemiţătorul este instalaţia electronică ce produce unde electromagnetice folosite în radiocomunicaţii. Are în componenţa sa un bloc oscilator de radiofrecvenţă care trebuie să îndeplinească următoarele caracteristici:

– gama frecvenţelor generate să fie cuprinsă în domeniul utilizat (ex. 150 kHz – 30 MHz);

– posibilitatea de variaţie a frecvenţei, gama frecvenţelor putând fi împărţită în subgame;

– posibilitatea de a modula amplitudinea sau frecvenţa semnalului de radiofrecvenţă cu ajutorul unui semnal de audiofrecvenţă (MA sau MF);

– posibilitatea reglării nivelului de ieşire (pe antenă) de la câţiva microvolţi la sute de milivolţi sau mult mai mult, în funcţie de necesităţi;

– precizia scării de frecvenţă şi stabilitatea frecvenţei să fie cât mai mari (de ordinul $10^{-3} \div 10^{-4}$).

Modulaţia reprezintă modificarea uneia dintre cele două caracteristici ale semnalului de înaltă frecvenţă (semnalul purtător al informaţiei ce dorim să o transmitem) – amplitudinea sau frecvenţa, în conformitate cu forma curentului de joasă frecvenţă (semnalul modulator preluat spre exemplu de la un microfon).

În cazul modulaţiei *în amplitudine*, frecvenţa curentului care produce undele electromagnetice în antenă rămâne constantă şi variază doar amplitudinea acestuia, în funcţie de forma şi caracterul semnalului de modulaţie (ex. voce, muzică, impulsuri etc.).

În cazul modulaţiei *în frecvenţă*, amplitudinea curentului de înaltă frecvenţă rămâne constantă, variind doar frecvenţa acestuia într-un interval dat, în jurul unei valori medii. Modulaţia de frecvenţă a fost descoperită încă din 1920, dar a fost folosită practic abia în jurul anilor 1935-1940, când s-a dezvoltat tehnica undelor ultrascurte.

În prezent, în tehnica radiotelecomunicațiilor, radiodifuziunii și televiziunii, alături de modulația în amplitudine (MA) se utilizează modulația de frecvență (MF) și modulația de fază (MFz – oscilațiile modulate în frecvență sunt în avans de fază sau în urma semnalului purtător, în corelație cu semnalul modulator). Modulația de fază este simultan și o modulație de frecvență.

Emițătorul trebuie să asigure producerea unui c.a. de înaltă frecvență, pe care să-l transmită în antenă. Datorită prezenței acestui curent, în jurul antenei apare un câmp electromagnetic (undă electromagnetică) ce variază cu mare viteză concomitent cu variațiile curentului din antenă. În drumul lor, undele ajung la antena receptorului. Aici, câmpul electromagnetic ce trebuie recepționat este identic cu cel de la antena emițătorului, dar mult mai slab (de milioane de ori mai slab), în funcție de distanța dintre cele două antene.

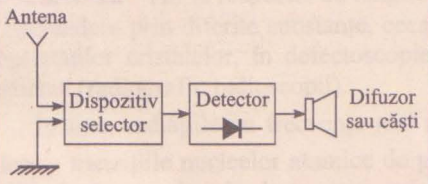
Asupra antenei *receptorului* acționează simultan o mulțime de unde electromagnetice, de la diverse emițătoare radio care funcționează concomitent, precum și diverse unde electromagnetice create de fenomenele electrice din atmosferă (provenite de la Soare, stele, fulgere sau create de diverse instalații electrice industriale sau casnice). Toate acestea au diverse frecvențe și intensități. Pentru ca din această mulțime de semnale de radiofrecvență să se poată separa numai semnalul dorit, receptorul trebuie să aibă o anumită „selectivitate", adică să poată selecta semnalele de radiofrecvență ale unui singur emițător.

În cazul emisiunilor de radiodifuziune, când se transmite în fonie, emițătorul emite un întreg spectru de frecvențe. De aceea, receptoarele radio trebuie să aibă o asemenea selectivitate, încât să recepționeze semnalele transmise într-o anumită porțiune de bandă de frecvențe; această bandă de frecvențe poartă denumirea de „bandă de trecere" sau pur și simplu „selectivitatea" unui receptor și se exprimă în Hz. În cazul radioreceptoarelor de radiodifuziune, banda de trecere trebuie să fie de 9 kHz, deoarece ecartul de frecvență (intervalul de frecvență) între două emițătoare este de 9 kHz.

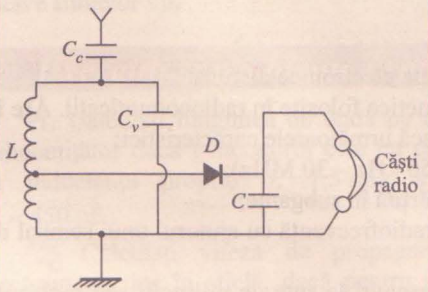
Radiorecepția

În cazul în care antena receptoare este relativ aproape de postul de emisie, curentul indus în aceasta poate avea o valoare relativ mare și nu necesită o amplificare prealabilă pentru a fi folosit la reproducerea semnalului de radiofrecvență transmis. În acest caz se poate realiza cel mai simplu receptor radio, denumit *radioreceptorul cu simplă detecție* (fig. 2.99.a, b).

Fig. 2.99



a) Schema bloc a radioreceptorului cu simplă detecție



b) Schema electrică a radioreceptorului cu simplă detecție

Schema conține un dispozitiv selector format dintr-o bobină de inductanță L și un condensator variabil C_v. Circuitul selector se acordează cu ajutorul condensatorului variabil C_v pe frecvența emițătorului, respectiv pe frecvența postului dorit. Dioda D detectează semnalul de radiofrecvență preluat de pe o priză a bobinei L și, după ce undele de înaltă frecvență sunt filtrate cu ajutorul condensatorului C, semnalul obținut este aplicat căștilor radio sau unui difuzor.

Radioreceptorul cu amplificare directă

Acest radioreceptor conține următoarele blocuri componente: dispozitivul selector, amplificatorul de înaltă frecvență, etajul detector, amplificatorul de joasă frecvență și difuzorul (fig. 2.100.a, b).

L_1-C_{v_1} – dispozitiv selector

T_1 – amplificator de înaltă frecvență

L_2-C_{v_2} – circuit oscilant acordat pe aceeași frecvență ca și L_1-C_{v_1}

D – etaj detector

T_2 – amplificator de joasă frecvență

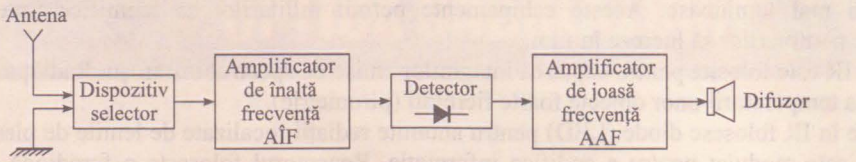
Acest tip de receptor este mai sensibil decât receptorul cu simplă detecție, datorită celor două etaje amplificatoare, și mai selectiv, ca urmare a folosirii a două circuite oscilante acordate.

Pentru mărirea selectivității și a calității audiției se utilizează etaje suplimentare de detecție, filtrare și amplificare a semnalelor recepționate.

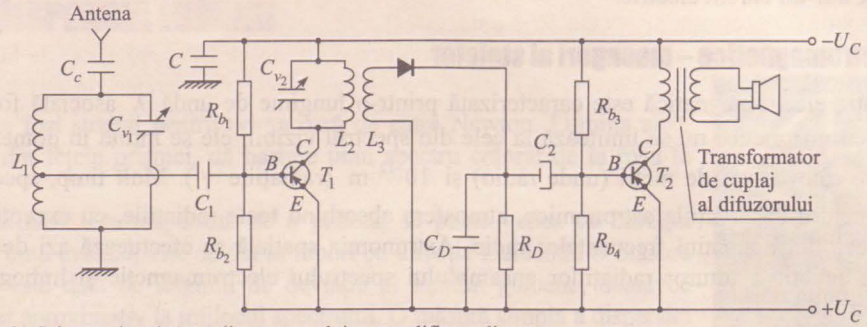
În funcție de modul în care se realizează aceste funcții, există o varietate largă de scheme electronice, cele mai utilizate dintre acestea fiind de tipul superheterodină.

Principiul superheterodinei constă în translatarea frecvențelor recepționate la o valoare fixă a frecvenței, numită frecvență intermediară. Acest proces se realizează într-un etaj special cu care este dotat radioreceptorul superheterodină, numit schimbător de frecvență. Astfel, pe baza acestui principiu, se înlătură modificarea parametrilor radioreceptoarelor în funcție de frecvențele ce se dorește a fi recepționate.

Fig. 2.100



a) Schema bloc a radioreceptorului cu amplificare directă



b) Schema electrică a radioreceptorului cu amplificare directă

2.5.2 Alte aplicații ale undelor electromagnetice

Dispozitive cu microunde

Energia microundelor a fost folosită în procesele industriale în locul surselor convenționale de căldură prezentând mai multe avantaje: încălzirea rapidă în profunzime, economisirea de energie și de timp, transfer energetic fără poluare.

În timpul celui de-al doilea război mondial, doi britanici au inventat magnetronul (generator de microunde) utilizat mai întâi la sistemul de detectare prin radar a avioanelor.Întâmplător, D. Percy a descoperit că microundele generau o creștere extrem de rapidă a temperaturii, iar în 1954 a fost realizat primul cuptor cu microunde comercial. Astăzi poți găti la cuptorul cu microunde fripturi, cartofi prăjiți, produse de patiserie, alimentele păstrându-și savoarea și principiile nutritive.

Magnetronul este un oscilator de putere care lucrează în regim continuu sau de impulsuri. Banda se frecvențe de lucru este îngustă deoarece magnetronul utilizează cavități rezonante încorporate într-un anod metalic masiv de cupru. Între anod și catod se aplică o tensiune continuă de ordinul kV. Datorită cavităților rezonante, câmpul electromagnetic are la rezonanță intensitate mare, astfel încât la obținerea de microunde prin frânarea electronilor contribuie atât interacțiunea câmp electric – electron cât și intensitatea mare a câmpului în spațiul anod – catod.

Una dintre cavități conține o antenă care poate transmite energia de unde în exterior. Electronii absorb energie de la sursa de tensiune anodică și o cedează prin intermediul câmpului de înaltă frecvență cavităților rezonante.

Utilizări ale radiației infraroșii

Radiațiile infraroșii au lungimile de undă mai mari decât a luminii vizibile dar mai mici decât ale microundelor, adică 750 nm și 1 mm.

Radiațiile infraroșii se împart în:

– infraroșu apropiat cu $\lambda \in [0,75-1,4)$ μm folosite în telecomunicația prin fibre optice deoarece sunt absorbite foarte slab de dioxidul de siliciu din sticlă;

– infraroșu de lungimi de undă scurte cu $\lambda \in [1,4-3)$ μm absorbite puternic de apă pentru $\lambda \in 1450$ nm ;

– radiații infraroșu medii;

– radiații infraroșu lungi;

– radiații infraroșu îndepărtate cu $\lambda \in [15-1000]$ μm .

Radiațiile infraroșii sunt adesea asociate cu căldura deoarece obiectele la temperatura camerei emit radiații în banda de mijloc a IR (radiația corpului negru). Suprafața Pământului absoarbe radiația vizibilă a Soarelui și emite mare parte din energia acesteia ca radiații infraroșii în atmosferă. Gazele din atmosferă, în principal vaporii de apă, dar și CO_2, metanul, NO_2, CFC absorb radiațiile infraroșii și le reemit în toate direcțiile, inclusiv înapoi spre Pământ, generând efectul de seră.

Radiaţiile IR sunt folosite la echipamentele de vedere nocturnă fiind detectate şi convertite în imagini, obiectele mai calde apărând mai luminoase. Aceste echipamente permit militarilor să identifice ţintele fiinţe umane , automobile etc., iar pompierilor să lucreze în fum.

Fotografia în IR este folosită pentru captarea imaginilor emise de spectrul infraroşu. Radiaţia IR poate fi folosită pentru determinarea temperaturii unor obiecte foarte fierbinţi (pirometrie).

Comunicaţiile în IR folosesc diode (LED) pentru anumite radiaţii focalizate de lentile de plastic într-un fascicul subţire. Fascicolul este modulat pentru a codifica informaţia. Receptorul foloseşte o fotodiodă cu siciliu pentru a converti radiaţia IR într-un curent electric.

Undele electromagnetice – mesageri ai stelelor

Fiecare radiaţie electromagnetică este caracterizată printr-o lungime de undă λ asociată fotonilor de energie $h\upsilon$. Radiaţiile electromagnetice nu se limitează la cele din spectrul vizibil, ele se întind în domeniul lungimilor de undă cuprinse între câteva sute de metri (unde radio) şi 10^{-12} m (radiaţiile γ). Mult timp, spectrul vizibil a fost singurul accesibil pentru observaţiile astronomice, atmosfera absorbind toate radiaţiile, cu excepţia a două ferestre: cea din vizibil şi cea din domeniul frecvenţelor radio. Astronomia spaţială se efectuează azi deasupra atmosferei, permiţând captarea practic a tuturor radiaţiilor ansamblului spectrului electromagnetic şi îmbogăţind considerabil cunoaşterea Universului.

Observaţie

De la ultraviolet la infraroşu ($0,4\ \mu m < \lambda < 0,8\ \mu m$)

Acest domeniu corespunde radiaţiei vizibile sau invizibile apropiate, emisă de stele masive şi calde şi de gazele incandescente interstelare. Analiza în spectru vizibil a luminii provenite de la stele permite cunoaşterea condiţiilor fizice care există în straturile externe ale acestora, elementele chimice care sunt prezente acolo şi abundenţa lor.

Stelele prezintă diferite culori, căci temperaturile lor superficiale sunt diverse: Sirius este albă, Vega albăstruie şi Antares roşcată.

De la infraroşu la unde milimetrice ($0,8\ \mu m < \lambda < 1\ \mu m$)

Acest domeniu corespunde radiaţiei obiectelor reci ($T < 3000$ K) ale Universului: nuclee de galaxii, nori interstelari.

Astrofizica este un domeniu delicat pentru că, pe de o parte, nu se poate practica decât dincolo de atmosferă, iar pe de alta, semnalele primite fiind foarte slabe, sunt înecate de radiaţiile instrumentelor înseşi. De aceea este necesară răcirea atmosferei de lucru între 10 K şi 70 K.

Studiul acestei radiaţii prezintă un interes particular pentru detecţia speciilor chimice (ioni, atomi şi molecule) şi a abundenţei lor. Această tehnică datează din anii '60. O cartografie în I.R. a Universului efectuată în 1983 a contribuit mult la cunoaşterea Universului apropiat şi îndepărtat.

Radiofrecvenţele ($1\ mm < \lambda < 1\ km$)

Radioastronomia s-a dezvoltat considerabil după al doilea război mondial prin utilizarea radarelor. Pentru a recepţiona un flux de energie cât mai mare sunt necesare radiotelescoape gigantice. Aceasta permite detectarea radiaţiilor foarte slabe şi creşterea puterii separatoare. Astfel pot fi observate anumite radiaţii caracteristice atomilor (de hidrogen, heliu, carbon) şi moleculelor (metan, amoniac, etanol) din spaţiul interstelar al galaxiei noastre.

Descoperirea în 1964 a radiaţiei de fond cosmic, numită radiaţia termică de 27 K, a consolidat teoria BIG BANG.

Emisia radio a galaxiilor provine de la plasmele conţinând particule foarte energice (electroni relativişti) în mişcare în câmpuri magnetice intense.

Radiaţia ultravioletă ($0,01\ \mu m < \lambda <$ μm)

Detectarea acestei radiaţii puternic absorbite de atmosfera terestră necesită instrumente aflate la bordul sateliţilor sau baloanelor-sondă.

Analiza radiaţiei U.V. contribuie la o mai bună cunoaştere a compoziţiei chimice a stelelor; ea permite interpretarea formării şi evoluţiei stelelor.

Radiaţiile de energie înaltă ($1\ fm < \lambda < 10\ nm$)

Domeniul lor se întinde de la razele X la cele γ. Corespund unor energii de ordinul celor ale particulelor accelerate.

Această radiaţie este foarte bogată în informaţie caracteristică evenimentelor deosebit de violente: explozii de supernove, radiaţiile pulsarilor, aglomerări de materie. Ea este absorbită de atmosferă şi nu poate fi studiată decât de sateliţi.

Proprietăţile fizice ale radiaţiilor X şi γ sunt asemănătoare, dar detectorii sunt foarte diferiţi. Astfel, telescoapele X au o structură optică clasică, în timp ce detectorii γ folosesc tehnici ale fizicii particulelor (scintilatori, spre exemplu). Aceste două tehnici, dezvoltate după 1970, aduc rezultate esenţiale pentru cunoaşterea Universului.

Capitolul III

OPTICA ONDULATORIE

3.1 DISPERSIA LUMINII

Fenomenul a fost studiat pentru prima oară de către Newton. Lumina albă, incidentă pe una din feţele prismei, dă naştere unui spectru colorat de la roşu la violet (fig. 3.1).

Când lumina albă este dispersată de o prismă, se poate vedea că întregul fascicul, în forma unui evantai, este deviat în raport cu direcţia incidentă. O măsură a acestei deviaţii este dată de unghiul de deviaţie al luminii galbene, deoarece galbenul este situat aproximativ la mijlocul spectrului. O măsură simplă a dispersiei o constituie deviaţia unghiulară dintre raza roşie şi cea violetă (fig. 3.2).

Pentru majoritatea materialelor transparente, cu cât este mai mare deviaţia, cu atât este mai mare şi dispersia. Strălucirea diamantului este datorată parţial dispersiei sale mari.

În practică se pot proiecta prisme care să îşi anuleze reciproc dispersia (prisma acromatică – fig. 3.3).

Fig. 3.1

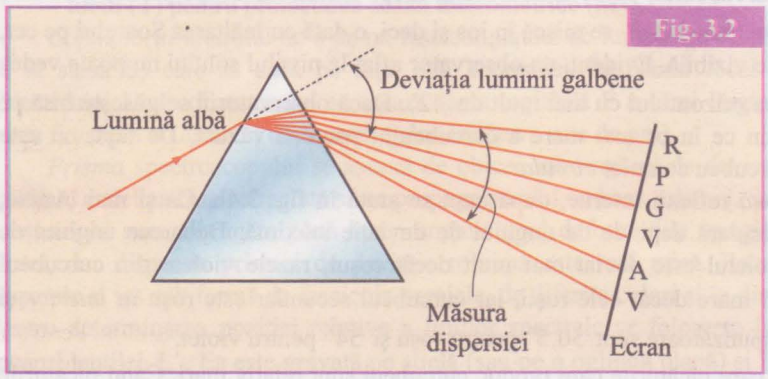


Fig. 3.2

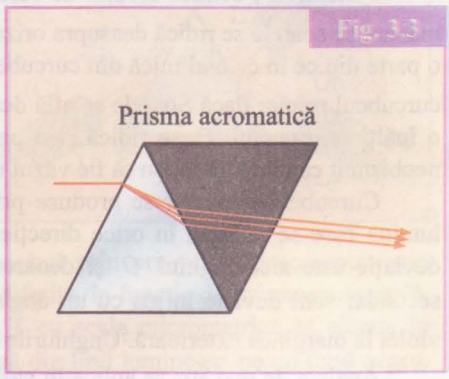


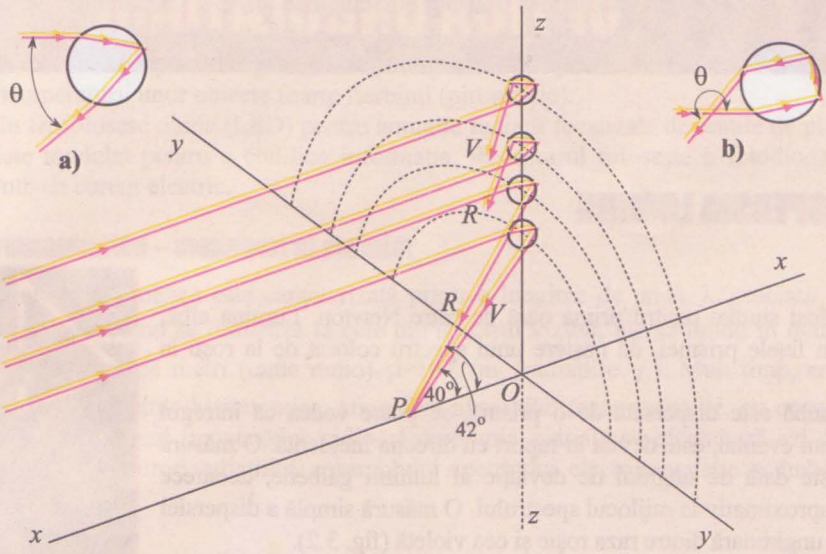
Fig. 3.3

*Curcubeul

Curcubeul se produce prin efectele combinate ale refracţiei, dispersiei şi reflexiei luminii Soarelui de către picăturile de ploaie. Atunci când condiţiile de observaţie sunt favorabile se pot vedea două curcubee, cel interior fiind numit primar, iar cel exterior secundar. Curcubeul interior, care este mai strălucitor, este roşu la margine şi violet în centru, pe când în curcubeul din exterior, mai stins, culorile sunt inversate.

Curcubeul primar se produce astfel. Presupunem că razele de la Soare sunt orizontale şi considerăm raza care loveşte o picătură de ploaie, ca în fig. 3.4a. Această rază se refractă pe prima suprafaţă şi este parţial reflectată pe cea de-a doua, ajungând din nou, după cum se arată, pe suprafaţa de sus. Savantul francez Descartes a calculat traiectoriile câtorva mii de raze incidente în diferite puncte de pe suprafaţa unei picături de ploaie şi a arătat că, dacă o rază de o culoare dată ar fi incidentă într-un punct astfel încât deviaţia ei să fie *maximă*, toate celelalte raze de aceeaşi culoare care cad pe suprafaţa picăturii în imediata vecinătate a acestui punct vor fi reflectate într-o direcţie foarte apropiată de cea a primei raze. Aşadar, fiecare culoare este puternic reflectată în direcţia deviaţiei maxime a acelei culori particulare. Unghiul de deviaţie maximă a luminii roşii este 138°, astfel încât unghiul θ din figura 3.4a. este de $180^\circ - 138^\circ = 42^\circ$. Unghiul corespunzător pentru lumina violetă este de 40°, iar pentru celelalte culori el este cuprins între aceste unghiuri.

Fig. 3.4



Considerăm acum un observator în punctul P din fig. 3.4. Planul xOy este orizontal şi lumina Soarelui soseşte din stânga, paralel cu axa Ox. Toate picăturile care se află pe un cerc văzut din P sub un unghi de 42° şi cu centrul în O, vor reflecta putemic lumina roşie din P. Toate cele de pe un cerc văzut din P sub 40° vor reflecta puternic lumina violetă, în timp ce picăturile care ocupă poziţii intermediare vor reflecta culorile intermediare ale spectrului.

Punctul O, centrul arcului de cerc al curcubeului, poate fi considerat drept umbra lui P pe planul yOz. Pe măsură ce soarele se ridică deasupra orizontului, punctul P se mişcă în jos şi deci, o dată cu înălţarea Soarelui pe cer, o parte din ce în ce mai mică din curcubeu este vizibilă. Evident, un observator aflat la nivelul solului nu poate vedea curcubeul primar dacă Soarele se află deasupra orizontului cu mai mult de 42°. Dacă observatorul se găseşte însă pe o înălţime, punctul P se ridică şi o parte din ce în ce mai mare a curcubeului poate fi văzută. De fapt, nu este neobişnuit ca dintr-un avion să fie văzut un curcubeu complet *circular*.

Curcubeul secundar se produce prin *două* reflexii interne, după cum se arată în fig. 3.4b. Ca şi mai înainte, lumina care se reflectă în orice direcţie particulară depinde de unghiul de deviaţie maximă. Deoarece unghiul de deviaţie este aici unghiul O şi deoarece violetul este deviat mai mult decât roşul, razele violete din curcubeul secundar sunt deviate în jos cu un unghi mai mare decât cele roşii, iar curcubeul secundar este roşu în *interior* şi violet la marginea exterioară. Unghiurile corespunzătoare sunt $50,5^\circ$ pentru roşu şi 54° pentru violet.

Analiza de mai sus se aplică în cazul în care picăturile care produc curcubeul sunt relativ mari. Când picăturile sunt mici, difracţia joacă un rol la fel de important ca şi dispersia şi reflexia, iar lumina roşie, de exemplu, este recepţionată în cantităţi apreciabile de la picături aflate pe cercuri diferite de cele care sunt văzute sub un unghi de 42°. Curcubeul este în acest caz un amestec complicat de culori şi aspectul său depinde de dimensiunea picăturilor.

3.1.1. Interpretarea electromagnetică a dispersiei. Aplicarea în ştiinţă şi tehnică a fenomenului de dispersie

Cauza fenomenului de dispersie este dependenţa vitezei de propagare a undelor într-un mediu transparent de culoarea (lungimea de undă) a acestora. La rândul ei, viteza de propagare se leagă de indicele de refracţie n al materialului prin relaţia:

$$n = \frac{c}{v} \qquad (1)$$

în care c este viteza aceleiaşi radiaţii în vid.

În mod uzual, dispersia luminii se defineşte ca dependenţa indicelui de refracţie de lungimea de undă.

Experienţa arată că indicele de refracţie al unui mediu creşte cu scăderea lungimii de undă a radiaţiei şi se poate reprezenta pentru sticle optice prin formula lui Cauchy:

$$n_{(\lambda)} \simeq A + \frac{B}{\lambda^2} \qquad (2)$$

unde A şi B sunt nişte constante caracterizând materialul transparent. Acest tip de dispersie se numeşte *normală*.

Dacă indicele de refracţie scade cu scăderea lungimii de undă, avem de-a face cu dispersia *anormală* (de exemplu prin prisme umplute cu iod sau cu o soluţie de fuxină sau cianină). Fenomenul a fost studiat de Kundt, care a stabilit o lege importantă, conform căreia fenomenul de dispersie anormală este strâns legat de absorbţia luminii în materialul prismei; toate corpurile care dau o dispersie anormală într-un anumit domeniu de lungimi de undă absorb puternic lumina în acest domeniu. În fig. 3.5 este redată variaţia indicelui de refracţie la cianină în regiunea domeniului de absorbţie (520 nm – 660 nm). S-a observat că radiaţiile albastre sunt refractate mai puţin decât cele roşii.

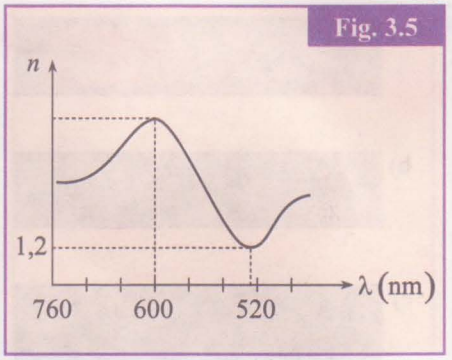


Fig. 3.5

Fenomenul de dispersie prin prisma optică este utilizat la analizarea luminii emise de diferite surse luminoase pentru identificarea compoziţiei chimice (atomice/moleculare) a acestora.

Ansamblul de imagini ale fantei de intrare a unui aparat cu prismă rezultate în urma descompunerii radiaţiei luminoase emise de o sursă poarta numele de *spectru de emisie*, iar aparatul respectiv se numeşte spectroscop.

Spectroscopul cu prismă (fig. 3.6) destinat observării directe a spectrului folosind ca receptor ochiul se compune din următoarele piese:

– colimatorul (C) cu fantă (F);
– prisma (P) din sticlă optică, uneori din cuarţ;
– luneta (L) pentru observarea spectrelor;
– tubul (T) pentru proiectarea scalei micrometrice (M).

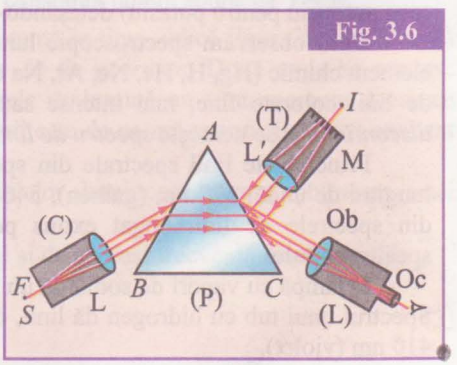


Fig. 3.6

Colimatorul are rolul de a da un fascicul paralel de lumina (provenită de la sursa S) care să cadă pe faţa AB a prismei. În planul focal al obiectivului L al colimatorului se aşează fanta reglabilă F a cărei lărgime poate fi variată cu ajutorul unui şurub (până la câteva sute de μm).

Prisma spectroscopului se aşează de obicei sub unghiul de deviaţie minimă, astfel ca raza refractată să se propage paralel cu baza prismei. Sub acest unghi sunt eliminate până la un anumit grad deformaţiile imaginii fantei, dar dispersia prismei de deviaţie minimă este mai mică. Razele trecând prin prismă se descompun prin dispersie şi ies sub formă de fascicole paralele, de diferite culori şi în direcţii diferite, în funcţie de lungimea de undă. Pentru determinarea poziţiei relative a liniilor spectrale se foloseşte luneta T cu scala micrometrică M situată în focarul lentilei L'. Ea este gravată pe sticlă (sau pe o oglindă plană) şi formată din linii luminoase pe un fond negru. Este luminată de izvorul I (bec 6 V). Razele care pleacă din punctele scalei sunt transformate într-un fascicul paralel de luneta scalei în planul focal al obiectivului lunetei. În felul acesta ochiul vede prin ocularul lunetei în acelaşi timp imaginea scalei şi a spectrului (imaginea fantei pentru fiecare lungime de undă λ).

Etalonarea spectroscopului

Aşezăm în faţa fantei colimatorului, pe rând, un tub Geissler (de descărcare electrică într-un gaz rarefiat) cu Hg, apoi cu Ne. Folosim tabelul cu lungimile de undă ale spectrului acestor gaze şi citim pe scală diviziunile corespunzătoare fiecărei linii. Se trasează apoi curba de etalonare a spectroscopului luând ca abscisă lungimea de undă şi ca ordonată, diviziunile scalei micrometrice (sau invers).

Tipuri de spectre

Spectroscopia al cărei obiect este studiul şi interpretarea spectrelor constituie o ramură foarte importantă a fizicii, care a permis progrese considerabile în cunoaşterea microcosmosului (structura atomului), dar şi a macrocosmosului (astre şi stele).

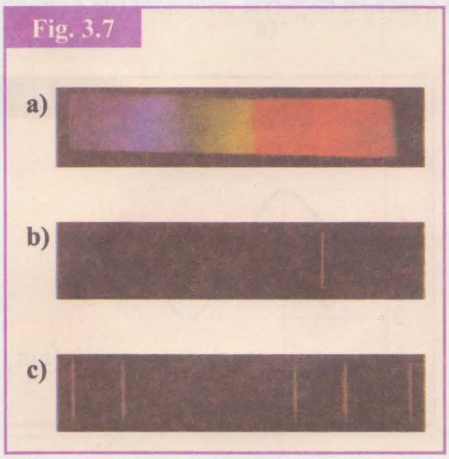
Spectrele se clasifică în spectre de emisie şi spectre de absorbţie. Spectrele de emisie pot fi, la rândul lor: a) spectre continue, b) spectre de linii şi c) spectre de bandă, după natura sursei luminoase care emite lumina analizată.

Spectre continue de emisie

Lumina unei lămpi cu incandescență are un *spectru continuu*, conținând toate culorile curcubeului: roșu, oranj, galben, verde, albastru, indigo, violet.

Același spectru se obține prin descompunerea luminii emise de Soare. Spunem că lumina albă are un spectru continuu, ce se întinde de la roșu la violet. Ea este policromatică (fig. 3.7 a).

Fig. 3.7



Lumina emisă de orice solid sau lichid adus la incandescență (filamentul unui bec, cărbunii unui arc electric etc.) este formată dintr-o infinitate de linii spectrale juxtapuse, ale căror lungimi de undă variază continuu: spectrul lor este continuu. Spectrul unui gaz la presiune ridicată încălzit puternic este tot unul continuu.

Spectre de linii, de emisie

Analizând lumina emisă de un laser cu He – Ne, vom observa o singură linie roșie (fig. 3.7 b), pe fond negru. Lumina laserului are un spectru comportând o *singură linie*: ea este *monocromatică*.

Atenție! Nu plasați ochii pe traiectoria fasciculului laser: acesta afectează corneea, opacizează cristalinul și distruge definitiv celulele retinei!

Înmuind un fir de platină într-o soluție de NaCl, apoi într-o soluție de KI (săruri ale unor metale alcaline) și introducându-l în flacăra unui bec Bunsen, flacăra ia un aspect caracteristic fiecărui metal alcalin: galben pentru Na, roșu purpuriu pentru K etc. Observând spectrul luminii emise cu ajutorul spectroscopului, remarcăm linii intense (galben pentru sodiu, roșu purpuriu pentru potasiu) detașându-se pe fondul unui spectru continuu corespunzător flăcării becului Bunsen.

Dacă observăm spectroscopic lumina emisă de un tub Geissler ce conține vapori la presiune scăzută ai unui element chimic (Hg, H, He, Ne, Ar, Na etc.) supus unei diferențe mari de potențial (20 kV – 40 kV), remarcăm o serie de linii colorate fine, mai intense sau mai puțin intense detașându-se pe un fond negru. Spectrul obținut este *discontinuu* și se numește *spectru de linii.*

Principalele linii spectrale din spectrul unei lămpi cu vapori de mercur (fig. 3.7 c) corespund următoarelor lungimi de undă: 577 nm (galben), 546 nm (verde), 492 nm (albastru), 436 nm (indigo), 405 nm (violet). Este unul din spectrele de linii bogat extins pe întreg domeniul vizibil, motiv pentru care se utilizează la etalonarea spectroscopului.

O lampă cu vapori de sodiu dă un spectru conținând o singură linie foarte intensă cu lungimea de undă 589 nm. Spectrul unui tub cu hidrogen dă linii, dintre care principalele sunt: 656 nm (roșu), 486 (albastru), 434 nm (indigo), 410 nm (violet).

Spectrul unui gaz la presiune joasă și temperatură înaltă sau supus unei diferențe de potențial ridicate prezintă linii spectrale; atomii gazului emit radiații numai pentru anumite frecvențe specifice, caracteristice atomilor emitenți.

O radiație luminoasă monocromatică este constituită dintr-o undă luminoasă de frecvență bine determinată. Frecvența (numărul de vibrații din unitatea de timp), notată cu litera grecească ν, caracterizează radiația și-i determină culoarea. Ordinul de mărime al frecvențelor radiațiilor luminoase vizibile este cuprins între 10^{14} Hz (roșu) și 10^{15} Hz (violet). Frecvența nu depinde de mediul de propagare a luminii.

Într-un spectru de emisie, fiecărei linii îi corespunde o radiație monocromatică de o anumită frecvență. Lumina emisă de atomii unui element chimic dat este constituită din radiații de *frecvențe bine determinate.*

Spectrele substanțelor moleculare sau ionice (clorofilă, permanganat de potasiu) prezintă spectre de emisie formate din benzi colorate pe fond negru.

Analiza spectroscopică are aplicații în astrofizică (identificarea compoziției chimice a astrelor) și în industrie (determinarea concentrației soluțiilor unor substanțe).

3.2 INTERFERENȚA LUMINII

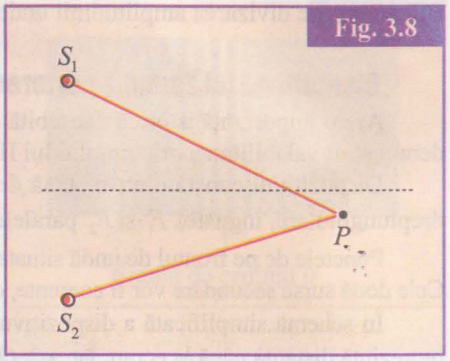
În capitolele anterioare ați studiat propagarea undelor mecanice precum și a celor electromagnetice. Deseori aceste unde au fost considerate *sinusoidale*, având o singură frecvență și o singură lungime de undă. O asemenea undă se numește undă monocromatică, adică având o singură culoare. Sursele de lumină obișnuite nu emit lumină monocromatică, ci o distribuție continuă de lungimi de undă. În laborator se poate obține lumină practic monocromatică

prin trecerea luminii cu spectru continuu printr-un filtru care opreşte trecerea tuturor lungimilor de undă, cu excepţia unui interval îngust. Lămpile cu descărcare în gaze emit spectre de linii, în care lumina constă dintr-un numar de culori, fiecare culoare numită linie spectrală având o bandă îngustă de lungimi de undă. Sursa cea mai apropiată de monocromatism este laserul.

Interferenţa luminii, la fel ca şi interferenţa undelor mecanice, constă în suprapunerea şi compunerea în acelaşi loc a două sau mai multe unde luminoase.

Spre deosebire de undele mecanice la care rezultatul interferenţei se poate observa privind amplitudinea rezultantă, în cazul luminii, rezultatul interferenţei este vizibil numai după intensitatea luminoasă din punctul respectiv.

Intensitatea câmpului luminos este o mărime proporţională cu energia conţinută în unitatea de volum a câmpului electromagnetic. Dintre componentele undei electromagnetice numai intensitatea câmpului electric contribuie la senzaţia vizuală şi de aceea se va considera exclusiv influenţa componentei electrice $\vec{E}$.



În studiul câmpului electromagnetic aţi întâlnit relaţia de calcul a densităţii volumice de energie:

$$w = \varepsilon E^2 \qquad (1)$$

sau, folosind expresia elongaţiei câmpului electric $E = E_0 \sin \omega t$,

$$w = \varepsilon E_0^2 \sin^2 \omega t \qquad (2)$$

Ochiul omenesc sau orice alt receptor prezintă o anumită inerţie, din acest motiv el va înregistra acţiunea medie în timp a acestei mărimi.

Valoarea medie în timp a lui E^2, notată $\overline{E^2}$ se numeşte intensitate luminoasă în punctul considerat. Cum media temporală a lui $\sin^2 \omega t$ este o constantă putem spune că $I \sim E_0^2$.

Pentru ca intensitatea luminoasă în punctul considerat să rămână constantă în timp, adică figura de interferenţă obţinută să aibă un caracter staţionar trebuie ca undele electromagnetice *să fie coerente.* Două unde se numesc *coerente* dacă ele au o diferenţă de fază constantă în timp. Sursele naturale de lumină nu sunt coerente deoarece lumina este emisă aleator de către atomii sursei. Procesul de emisie a luminii este de natură cuantică şi va fi analizat într-unul din capitolele următoare.

În continuare vom încerca să explicăm necesitatea coerenţei undelor luminoase pentru obţinerea unei interferenţe staţionare.

Fie două surse punctiforme S_1 şi S_2 care emit unde luminoase paralele şi de aceeaşi frecvenţă după ecuaţiile:

$$\begin{aligned} E_1 &= E_{01} \sin \omega t \\ E_2 &= E_{02} \sin \omega t \end{aligned} \qquad (3)$$

În punctul P ecuaţiile elongaţiei vor fi:

$$\begin{aligned} E_{1P} &= E_{01} \sin(\omega t + \varphi_1) \\ E_{2P} &= E_{02} \sin(\omega t + \varphi_2) \end{aligned} \qquad (4)$$

În punctul P: $E_P = E_{1P} + E_{2P}$

Utilizând metoda de compunere a oscilaţiilor paralele:

$$E_P = E_{0P} \sin(\omega t + \varphi) \qquad (5)$$

iar amplitudinea rezultantă:

$$E_P^2 = E_{01}^2 + E_{02}^2 + 2E_{01}E_{02} \cos \Delta\varphi \qquad (6)$$

Cum intensitatea undei luminoase $I_P \sim E_P^2$, rezultă că:

$$I_P = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2} \cos \Delta\varphi \qquad (7)$$

Termenul $2\sqrt{I_1 I_2} \cos \Delta\varphi$ se numeşte **termen de interferenţă** şi se vede că dacă $\Delta\varphi$ este constant în timp, adică undele sunt coerente, intensitatea luminoasă a punctului P nu se schimbă în timp.

Dacă undele nu sunt coerente $\Delta\varphi$ variază foarte rapid, iar ochiul va sesiza o medie a acestei variaţii care este, în final, nulă. În acest caz în orice punct putem scrie $I = I_1 = I_2$ având aceeaşi valoare în tot câmpul de interferenţă.

În cazul în care *undele* sunt *coerente,* atunci în câmpul de interferenţă apar, ca rezultat al compunerii undelor, *franje de interferenţă* sub forma unor alternanţe de benzi sau inele luminoase şi întunecoase în funcţie de geometria dispozitivului interferenţial.

3.3 DISPOZITIVUL LUI YOUNG

Pentru obținerea în practică a undelor coerente se procedează în modul următor: se separă din fluxul luminos emis de o sursă *monocromatică* printr-un procedeu oarecare două fascicule care ulterior se reîntâlnesc. Cele două fascicule vor fi coerente deoarece provin de la aceeași sursă, conțin toate undele elementare emise de atomii sursei monocromatice.

Procedeele de separare sunt fie divizarea frontului de undă (dispozitivul Young, biprisma Fresnel, bilentila Billet etc.) fie divizarea amplitudinii undei (lama cu fețe plan-paralele, pana optică, inelele lui Newton).

Dispozitivul lui Young. Interferența nelocalizată

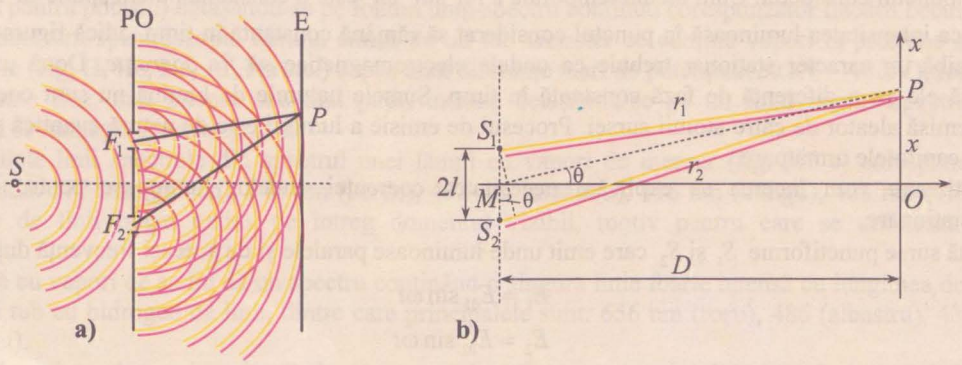
Are o importanță istorică deosebită deoarece, cu ajutorul lui s-a realizat primul experiment de interferență care a demonstrat valabilitatea principiului lui Huygens în optică, adică valabilitatea teoriei ondulatorii a luminii.

Dispozitivul constă dintr-o sursă de lumină (S) monocromatică, un paravan în care sunt practicate două fante dreptunghiulare, înguste, F_1 și F_2 paralele între ele și un ecran (E) (fig. 3.9).

Punctele de pe frontul de undă situate în dreptul fantelor emit noi unde secundare, conform principiului lui Huygens. Cele două surse secundare vor fi coerente, deoarece undele emise de ele provin de pe aceeași suprafață de undă.

În schema simplificată a dispozitivului Young (fig. 3.9b) se notează cu $2l$ distanța dintre sursele secundare, D reprezintă distanța până la ecran, iar $x = OP$ este distanța de la planul de simetrie MO al dispozitivului la punctul P.

Fig. 3.9



Presupunem că sursele secundare oscilează după ecuația:

$$E = E_0 \sin\frac{2\pi}{T}t$$

Considerând undele plane, ecuațiile lor în punctul P vor fi:

$$E_1 = E_0 \sin 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{r_1}{\lambda}\right)$$
$$E_2 = E_0 \sin 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{r_2}{\lambda}\right) \quad (1)$$

Ecuația intensității rezultate este:

$$E_P = E_1 + E_2 = E_0\left[\sin 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{r_1}{\lambda}\right) + \sin 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{r_2}{\lambda}\right)\right]$$

O transformăm în produs și obținem:

$$E_P = 2E_0 \cos\frac{2\pi}{T}\cdot\frac{r_2 - r_1}{2c}\sin\frac{2\pi}{T}\left(t - \frac{r_1 + r_2}{2c}\right) \quad (2)$$

Amplitudinea undei rezultante este:

$$\mathcal{E}_0 = 2E_0 \cos\frac{\pi(r_2 - r_1)}{\lambda} \quad (3)$$

iar intensitatea luminoasă în punctul P

$$I_P \sim \mathcal{E}_0^2 = 4E_0^2 \cos^2 \frac{\pi(r_2 - r_1)}{\lambda} \tag{4}$$

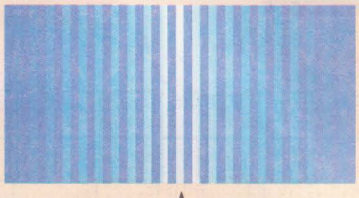
Intensitatea luminoasă va fi maximă în punctul P, în cazul:

$$\cos^2 \frac{\pi(r_2 - r_1)}{\lambda} = 1, \text{ adică } r_2 - r_1 = 2k\frac{\lambda}{2} \tag{5}$$

unde k este un număr întreg, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ şi minimă dacă

$$\cos^2 \frac{\pi(r_2 - r_1)}{\lambda} = 0, \text{ adică } r_2 - r_1 = (2k+1)\frac{\lambda}{2} \tag{6}$$

Fig. 3.10



Franja de ordinul 0

Numărul întreg k se numeşte *ordin de interferenţă.*

Diferenţa $(r_2 - r_1)$ este diferenţa de drum geometric şi reprezintă diferenţa dintre distanţele parcurse de lumină în vid până în punctul P. Dacă între fante şi ecran lumina se propagă printr-un mediu optic de indice de refracţie n, atunci vom avea diferenţa de drum optic $\delta = n(r_2 - r_1)$

Rezultatul interferenţei staţionare a undelor provenite de la S_1 şi S_2 va fi vizibil pe ecran sub forma unor benzi (franje) rectilinii luminoase, paralele între ele (fig. 3.10).

Distanţa dintre două maxime (sau minime) succesive se numeşte *interfranjă.*

Din fig. 3.9b se obţin relaţiile:

$$\text{tg}\,\theta = \frac{x}{D};\ \sin\theta = \frac{r_2 - r_1}{2l}$$

Pentru unghiuri θ foarte mici $(\theta < 5^\circ - 6^\circ)$, $\sin\theta \approx \text{tg}\,\theta \approx \theta$ exprimat în radiani. Rezultă:

$$\frac{x}{D} = \frac{r_2 - r_1}{2l} \tag{7}$$

Fie x_k valoarea lui x în punctul în care intensitatea este maximă, adică $r_2 - r_1 = k\lambda$. Relaţia (7) devine:

$$\frac{2x_k l}{D} = k\lambda, \text{ unde } x_k = \frac{k\lambda D}{2l} \tag{8}$$

Pentru ordinul de interferenţă imediat superior $k+1$ avem:

$$x_{k+1} = \frac{(k+1)\lambda D}{2l} \tag{9}$$

Rezultă astfel interfranja:

$$i = x_{k+1} - x_k = \frac{\lambda D}{2l} \tag{10}$$

Pentru observarea figurii de interferenţă nu există o poziţie preferenţială a ecranului, el poate fi deplasat oriunde în spatele celor două fante. Din acest motiv, interferenţa se numeşte *nelocalizată.* Pentru observarea optimă a franjelor distanţa dintre fante $2l \approx 1$ mm, $D = (1 \div 5)$ m.

Relaţiile deduse în acest paragraf sunt valabile pentru orice dispozitiv interferenţial care se poate reduce la un dispozitiv Young.

LUCRARE DE LABORATOR – *Studiul interferenţei nelocalizate cu ajutorul dispozitivului Young*

Materiale necesare:

– Fantă dublă (din trusa de optică);
– Sursă laser;
– Riglă gradată;
– Ruletă;
– Ecran;

Modul de lucru:

Se obţine figura de interferenţă pe ecranul aşezat la distanţa D de planul fantelor ($D = 2 \div 5$ m).

Se cunoaşte distanţa dintre fantele dispozitivului $2l = 1$ mm. Se măsoară lăţimea unui grup de 5-10 franje pe ecran şi se calculează interfranja ca distanţă dintre două minime întunecate succesive.

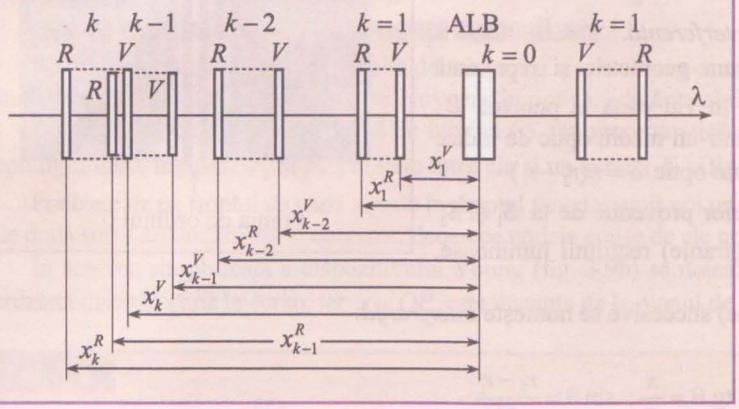
Utilizând relația

$$\lambda = \frac{2li}{D}$$

se va calcula lungimea de undă a radiației folosite. Se repetă experimentul pentru diferite poziții ale ecranului și se mediază rezultatele obținute.

Interferența în lumina albă

Fig. 3.11



Lumina albă fiind un amestec de o infinitate de frecvențe, condiția de maxim de interferență se realizează în dispozitivul Young, pentru unghiuri de împrăștiere diferite a razelor coerente care ajung pe ecran.

Acest fapt face ca maximele de interferență ale diferitelor culori să fie puțin deplasate unul față de altul, franjele apărând colorate:

– culoarea roșie este mai depărtată de franja centrală în timp ce culoarea violet este mai aproape, pentru orice ordin k;

– pe măsură ce ordinul k este mai mare, culorile sunt mai depărtate și apar grupate distinct;

– maximul roșu de ordin k se poate suprapune peste maximul violet de ordinul $k+1$ de la o anumită valoare a lui k. De asemenea și celelalte maxime încep să se suprapună și pe ecran apare o iluminare continuă în care franjele nu se mai disting.

În fig. 3.11 se prezintă spectrul franjelor de interferență până la ordinul la care încep să se suprapună franjele roșu cu violet.

Determinarea ordinului de interferență k la care se suprapun cele două franje colorate considerate, se face punând condiția de suprapunere a abscisei lor:

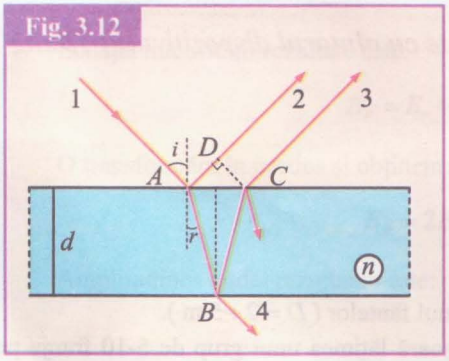
$$x_{k+1}^V = x_k^R,\ x_k^R = \frac{k \cdot D_2}{l} \cdot \lambda^R,\ x_{k+1}^V = (k+1)\frac{D_2}{l}\lambda^V$$

$$k\frac{D_2}{l} \cdot \lambda^R = (k+1)\frac{D_2}{l}\lambda^V,\ k \cdot \lambda^R = (k+1) \cdot \lambda^V$$

$$k = \frac{\lambda^V}{\lambda^R - \lambda^V}$$

3.4 Interferența localizată. Aplicații

Fig. 3.12



Cu siguranță ați observat irizațiile petelor de ulei sau benzină care apar pe suprafața apei de pe străzi sau coloratia baloanelor de săpun. Acest fenomen se numește interferență pe lame subțiri și apare prin suprapunerea undelor reflectate de cele două fețe ale peliculei subțiri.

Pentru o mai bună înțelegere a fenomenului să considerăm o lamă subțire, cu fețe plan-paralele (fig. 3.12).

Raza 1 incidentă în A pe lamă, se reflectă o parte, devenind raza 2 și se refractă cealaltă parte, pe direcția AB. În B o parte a razei AB se reflectă, devenind BC și se refractă în C, devenind raza 3. Razele 2 și 3 paralele sunt coerente și vor produce fenomenul de interferență prin reflexie. Pentru a observa figura de interferență putem folosi o lentilă convergentă care le va strânge în planul său focal sau privim cu ochiul liber, acomodat pentru vedere la infinit (la distanță mare). Franjele astfel obținute spunem că sunt *localizate la infinit*.

Diferența de drum optic dintre razele 2 și 3 care interferă este:

$$\delta = n(AB+BC)-\left(AD-\frac{\lambda}{2}\right) \qquad (1)$$

unde tremenul $\frac{\lambda}{2}$ apare datorită saltului de fază cu π radiani la reflexia pe medii cu indice de refracție mai mare (în punctul A).

Cum $AB = BC = \frac{d}{\cos r}$ și $AD = AC\sin i$, unde $AC = 2d\,\mathrm{tg}\,r$ și utilizând și legea refracției $\sin i = n\sin r$, obținem:

$$\delta = 2nd\cos r + \frac{\lambda}{2} \qquad (2)$$

Dacă incidența este normală ($i = 0$) și din legea refracției $n\sin r = \sin i$ reiese că și $r = 0$, atunci:

$$\delta = 2nd + \frac{\lambda}{2} \qquad (3)$$

Dacă $\delta = k\lambda$, se vor obține maxime de interferență, iar dacă $\delta = (2k+1)\frac{\lambda}{2}$ se vor obține minime de interferență. Aici k este ordinul de interferență și este un număr natural, $k \in \mathbb{N}^*$.

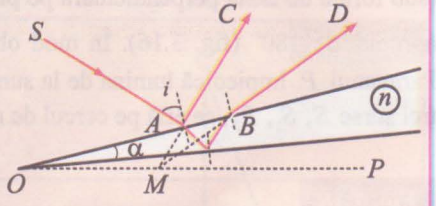
Intereferența este vizibilă și în cazul luminii refractate prin lamă (raze paralele cu 4), dar în acest caz nu mai apare saltul de π radiani:

$$\delta = 2nd\cos r \qquad (4)$$

Pana optică

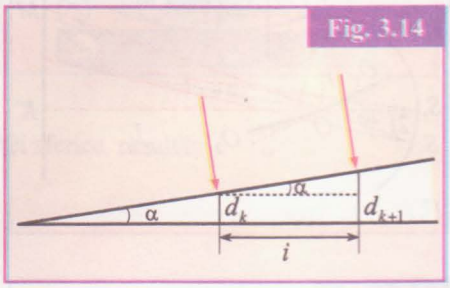
Dacă cele două suprafețe care delimitează pelicula (lama) subțire fac între ele un unghi mic, spunem că avem o pană optică (fig. 3.13). Dacă SA este raza incidentă și AC și BD razele coerente observăm că punctele de localizare ale franjelor ce corespund razei incidente SA și a celor paralele cu ea se vor afla în planul OP ce trece prin vârful O al penei.

Fig. 3.13



Dacă fasciculul incident este perpendicular pe fața superioară a penei (fig. 3.14), și dacă unghiul α este mic, de ordinul minutului, planul de localizare al franjelor se va afla în interiorul penei, practic pe suprafața ei inferioară. Spunem,din acest motiv, că franjele sunt localizate pe lamă. Starea de interferență într-un punct de pe lamă este determinată de grosimea lamei în acel punct, franjele se numesc *de egală grosime.*

Fig. 3.14



Pentru grosimea d_k a penei avem:

$$2nd_k + \frac{\lambda}{2} = k\lambda,$$

iar pentru ordinul următor $(k+1)$:

$$2nd_{k+1} + \frac{\lambda}{2} = (k+1)\lambda.$$

Rezultă:

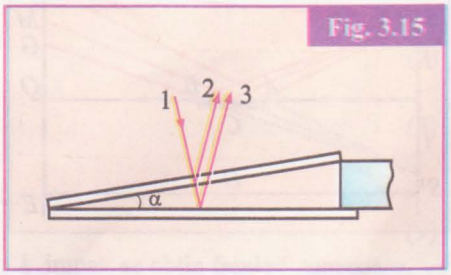
$$2nd_{k+1} - 2nd_k = \frac{\lambda}{2n} = \alpha i.$$

conform figurii 3.14.

Interfranja este dată de relația:

$$i = \frac{\lambda}{2n\alpha} \qquad (5)$$

Fig. 3.15



Interferența pe lame subțiri se obține cu surse de lumină întinse. Cu ajutorul a două lame subțiri din sticlă se poate obține o pană de aer (fig. 3.15), deosebirea constând în faptul că pierderea de semiundă are loc la reflexia pe suprafața inferioară a penei. Pana de aer este folosită pentru verificarea planeității suprafețelor. În acest scop se formează o pană de aer cu o suprafață etalon și suprafața controlată. Dacă aceasta din urmă are

abateri de la planeitate, franjele de egală grosime nu vor mai fi drepte şi paralele, ci apar ca nişte linii ondulate, în funcţie de grosimea penei.

O altă aplicaţie a interferenţei localizate este obţinerea de straturi antireflectante sau puternic reflectante. Raza incidentă care cade pe suprafaţa de separare a două medii transparente este parţial reflectată şi parţial transmisă (refractată), dacă se neglijează absorbţia. Dacă avem mai multe straturi din materiale neabsorbante, la fiecare trecere printr-o suprafaţă de separare vom avea numai o fracţiune din energia razei incidente care va fi transmisă şi o fracţiune care va fi reflectată. În acest fel fluxul luminos transmis, respectiv reflectat după trecerea prin mai multe straturi scade exponenţial cu numărul de straturi. Acest fapt devine supărăror la unele instrumente optice prevăzute cu obiective complicate formate din mai multe lentile.

Dacă se depune un strat subţire dintr-un dielectric transparent cu indicele de refracţie n_1 pe o lamă de sticlă cu indicele de refracţie n_2, atunci prin reflexia razei incidente pe cele două feţe reflectătoare se obţin două raze coerente care interferă între ele. Dacă intensitatea acestor două raze este aceeaşi şi diferenţa de drum optic între ele este egală cu $\frac{\lambda}{2}$, atunci aceste raze se anihilează reciproc şi pentru acea lungime de undă, λ, vom avea un minim nul. În acest fel lumina reflectată nu mai intră în aparat, creând iluminare parazită.

În lumina albă reflectată va lipsi radiaţia cu lungimea de undă egală cu dublul grosimii stratului antireflex. Dacă alegem pentru $\lambda = 555$ nm (galben – verde), atunci în lumina reflectată nu se va mai găsi această radiaţie. Lumina reflectată va fi purpuriu (componenta albastru – violet – roşu). Astfel de straturi subţiri se întrebuinţează la obiectivele aparatelor optice, iar metoda optică respectivă se numeşte „optica albastră".

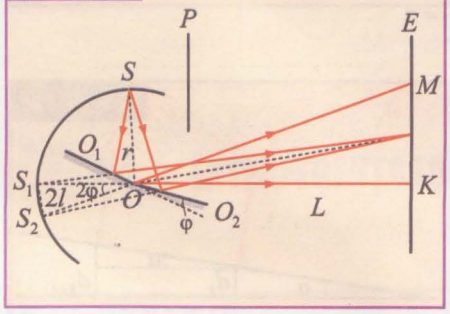
3.4.1 Alte dispozitive interferenţiale

Oglinzile lui Fresnel

În acest dispozitiv interferenţial, cele două surse coerente S_1 şi S_2 reprezintă imaginile virtuale ale sursei S (sub formă de fantă perpendiculară pe planul figurii) în două oglinzi plane O_1 şi O_2 care fac între ele un unghi foarte apropiat de 180° (fig. 3.16). În mod obişnuit se consideră că unghiul dintre oglinzi este φ, care este foarte mic. Paravanul P împiedică lumina de la sursa S să ajungă direct pe ecranul E. Din geometria figurii se observă că cele trei surse S, S_1, S_2, se află pe cercul de rază r cu centrul în punctul O. Distanţa dintre sursele coerente este:

$$2l = 2r \sin\varphi \approx 2r\varphi \qquad (1)$$

Fig. 3.16



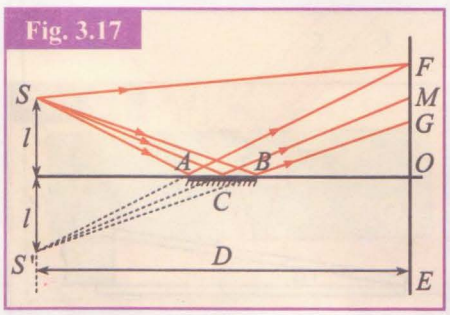
Din analogia cu dispozitivul lui Young, se obţine $D = r + L$, iar interfranja este

$$i = \frac{r+L}{2r\varphi}\lambda \qquad (2)$$

Domeniul MK de acoperire a undelor provenite de la cele două surse este $MK = 2L \operatorname{tg}\varphi \approx 2L\varphi$. Numărul total de franje care pot fi observate este

$$N = \frac{MK}{i} = \frac{2L\varphi \cdot 2r\varphi}{(r+L)\lambda} = \frac{4\varphi^2 rL}{(r+L)\lambda} \qquad (3)$$

Fig. 3.17



Oglinda Lloyd

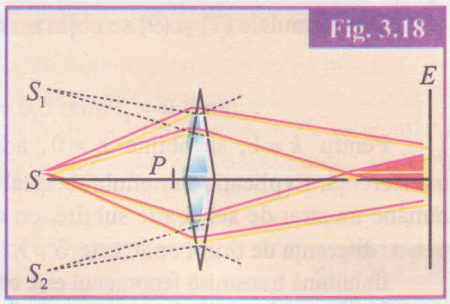
Este un dispozitiv interferenţial format dintr-o sursă punctiformă S, o oglindă plană (AB) şi un ecran E dispuse ca în fig. 3.17

Oglinda plană formează imaginea S' a sursei S iar pe ecran interferă raza directă SM şi raza reflectată SCM. Interfranja dispozitivului se calculează cu relaţia de la dispozitivul Young $i = \frac{\lambda D}{2l}$. Deoarece la reflexia pe oglinda plană are loc o modificare a fazei undei cu π radiani, ceea ce corespunde unei pierderi de $\frac{\lambda}{2}$, centrul figurii de interferenţă va fi întunecat.

Limitele zonei de interferenţă sunt F şi G.

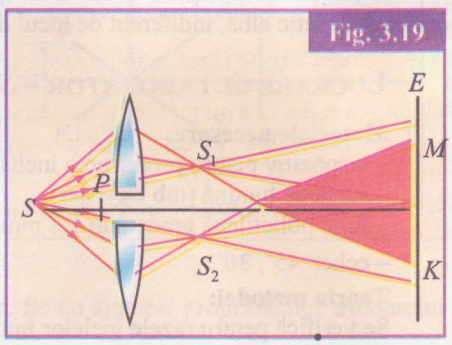
Biprisma lui Fresnel

Este alcătuită din două prisme identice, cu unghi refringent mic, aşezate bază lângă bază (fig. 3.18). Fasciculele de lumină emise de sursa S formează, după refracţie, două imagini virtuale S_1 şi S_2, care constituie sursele coerente.



Bilentila lui Billet

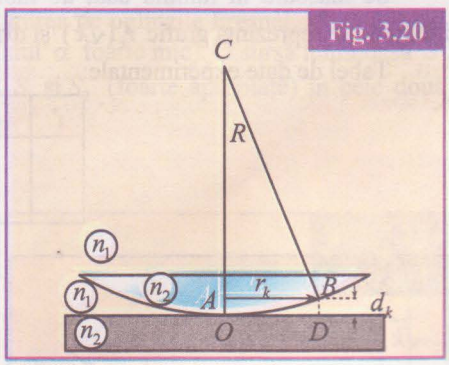
Constă dintr-o lentilă biconvexă tăiată diametral în două. Cele două jumătăţi sunt separate la o mică distanţă una de alta (fig. 3.19). Lumina emisă de sursa S formează, după refracţia în cele două jumătăţi de lentilă, imaginile reale S_1 şi S_2, care reprezintă sursele coerente. Franjele de interferenţă se formează pe domeniul MK de acoperire a fasciculelor provenite de la cele două surse. Dacă sursa S, care este sub forma unei diafragme, se aşează între bilentilă şi planul său focal, imaginile S_1 şi S_2 sunt virtuale. În acest caz nu este posibil să se producă interferenţa, deoarece fasciculele de lumină nu se mai acoperă, în mod obişnuit.



Toate aceste dispozitive experimentale produc franje de interferenţă într-un plan perpendicular pe planul bisector al surselor S_1S_2 aşezat orizontal în câmpul de interferenţă indicat în figurile respective. Astfel de franje de interferenţă se numesc *nelocalizate.*

Inelele lui Newton

O lentilă plan-convexă cu distanţa focală mare este aşezată cu faţa curbă pe o placă de sticlă plană (fig. 3.20). Între lentilă şi placă se formează un film de aer sau de lichid cu grosimea crescândă de la centru spre margine. În cazul în care un fascicul de lumină monocromatică cade perpendicular, sau aproape perpendicular, pe lentilă se observă, în lumina reflectată, franje de interferenţă circulare cu centrele în punctul O, de contact între cele două suprafeţe, numite *inelele lui Newton.*



Considerând că $n_2 > n_1$, diferenţa de drum optic între raza reflectată în punctul B şi cea reflectată în punctul D este:

$$\delta = 2n_1 d_k + \frac{\lambda}{2} \qquad (4)$$

Din triunghiul ABC obţinem:

$$R^2 = (R - d_k)^2 + r_k^2 = R^2 - 2Rd_k + d_k^2 + r_k^2$$

Deoarece se consideră că d_k este mult mai mic decât raza R a suprafeţei sferice, rezultă:

$$d_k = \frac{r_k^2}{2R} \qquad (5)$$

Astfel, diferenţa de drum optic devine:

$$\delta = n_1 \frac{r_k^2}{R} + \frac{\lambda}{2} \qquad (6)$$

Dacă

$$\delta = 2k\lambda / 2 \qquad (7)$$

avem maxime de interferenţă de ordinul k, iar pentru

$$\delta = (2k+1)\lambda / 2 \qquad (8)$$

intensitatea luminii este minimă.

Este mai comod să se unească condiţiile (7) şi (8) într-o singură formulă:

$$\delta = k\lambda / 2 \qquad (9)$$

înţelegând că valorile pare ale lui k corespund franjelor luminoase, iar pentru k impar, se obţin franje întunecoase.

Din formulele (7) şi (9) se obţin razele franjelor de interferenţă circulare, care reprezintă inelele lui Newton:

$$r_k = \sqrt{\frac{R\lambda}{2n_1}(k-1)} \qquad (10)$$

Pentru $k=1$, se obţine $r_1 = 0$, adică punctul de contact între lentilă şi placă, în care apare un minim de interferenţă. Explicaţia minimului central constă în faptul că în punctul de contact O, între lentilă şi faţa plană, mai rămâne un strat de aer foarte subţire, cu o grosime mult mai mică decât lungimea de undă λ şi, ca urmare, în acest punct, diferenţa de drum optic este $\delta = \lambda/2$ datorită reflexiei pe suprafaţa lamei.

În lumină transmisă fenomenul este complementar, iar în centrul figurii de interferenţă se află maximul de intensitate.

Utilizarea luminii albe conduce la faptul că inelele de interferenţă sunt colorate, iar numărul de inele observabile este mic, deoarece la ordine de interferenţă k relativ mari se suprapun inelele luminoase de diferite culori care dau o coloraţie practic albă, indiferent de locul de observaţie.

LUCRARE DE LABORATOR – *Studiul interferenţei localizate la infinit. Inelele lui Newton*

Materiale necesare:

– dispozitiv pentru producerea inelelor lui Newton;
– sursă de lumină (tub Geissler);
– folie polietilenă gradată în 1/2 mm;
– echer 45°, 30°.

Teoria metodei:

Se verifică pentru razele inelelor întunecate relaţia

$$r_k = \sqrt{\frac{kR\lambda}{\cos r}} \text{ cu } \cos r = \sqrt{1-\sin^2 r}$$

Observarea prin reflexie a inelelor lui Newton se face sub unghi i faţă de suprafaţa plană a lentilei plan-convexe.

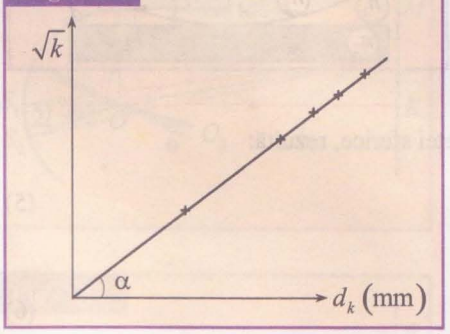
Modul de lucru:

Se măsoară în lumina dată de tubul Geissler diametrele inelelor întunecate înregistrând totodată şi ordinul inelului. Se reprezintă grafic $r_k(\sqrt{k})$ şi din panta dreptei se determină raza de curbură a lentilei plan-convexe (R).

Tabel de date experimentale:

$i°$	Ordinul	d_k (mm)

Fig. 3.21



Se repetă experimentul pentru mai multe valori ale unghiului de incidenţă, privind în lungul ipotenuzei unui echer.

Se trasează graficul $\sqrt{k}(d_k)$ şi se verifică liniaritatea sa. Din panta graficului ($\text{tg}\,\alpha$) se determină raza de curbură, cunoscând lungimile de undă ale inelelor luminoase.

Exemplu: Pentru tubul cu Ar şi vapori de Hg s-au măsurat diametrele inelelor verzi sau violete cu lungimile de undă $\lambda_{verde} = 579$ nm şi respectiv $\lambda_{violet} = 491{,}6$ nm şi s-a obţinut:

$$R = \frac{\sqrt{n^2-1}}{4n\lambda\,\text{tg}^2\alpha}$$

Se mediază rezultatele obţinute din graficele trasate.

Exerciţiu aplicativ 1

Enunţ: Un dispozitiv Young, cu distanţa între fante $2l = 2$ mm şi distanţa la paravan $D = 2$ m este iluminat cu radiaţii având lungimile de undă $\lambda_1 = 500$ nm şi $\lambda_2 = 400$ nm.

a) Să se calculeze valorile celor două interfranje şi să se discute sistemul de interfranje care se observă pe paravan.

b) În drumul unei raze se aşează o lamă subţire, plan-paralelă,de grosime $d = 2$ μm, având indicii de refracţie $n_1 = n(\lambda_1) = 1{,}50$ sau $n_2 = n(\lambda_2) = 1{,}54$. Să se calculeze deplasările sistemelor de franje pe paravan.

c) Pentru a mări interfranja, între ecran şi fante se aşează o lentilă convergentă cu convergenţa $C = 20\ \text{m}^{-1}$. Care este poziţia lentilei pentru care se obţine interfranja maximă?

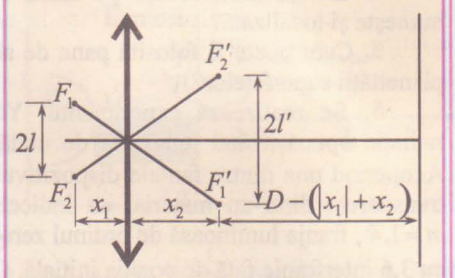
Soluţie: a) Interfranjele se calculează cu formula $i = \frac{\lambda D}{2l}$. Obţinem $i_1 = 0{,}5$ mm, $i_2 = 0{,}4$ mm.

b) Deplasarea franjelor pe ecran se calculează cu formula $\delta x = \frac{D}{2l} \cdot \delta r$, unde $\delta r = d(n-1)$.

Obţinem $\delta x_1 = 1$ mm, $\delta x_2 = 1{,}08$ mm.

c) Pentru situaţia în care este prezentă şi lentila, ne referim la fig. 3.22. Fie F_1 şi F_2 cele două fante, respectiv F_1' şi F_2' imaginile lor.

Fig. 3.22



Noua interfranjă este $i' = \frac{\lambda D'}{2l'}$ unde $D' = D - (|x_1| + x_2)$, iar $2l' = 2l\frac{x_2}{|x_1|}$.

Pe de altă parte, $\frac{1}{x_2} - \frac{1}{x_1} = C$.

Obţinem în final: $\frac{i'}{i} = f(x) = -\frac{C}{D}x^2 + C \cdot x - 1$, unde $x = |x_1|$.

Pentru cazul din enunţ, când $f(x)$ – studiat fie cu ajutorul derivatelor, fie cu ajutorul proprietăţilor trinomului de gradul II – corespunde la $x = \frac{D}{2} = 1$ m. Corespunzător: $\left(\frac{i'}{i}\right)_{\max} = 9$

Exerciţiu aplicativ 2

Enunţ: Dispozitivul interferenţial din fig. 3.23 este cunoscut sub denumirea de oglinzile Fresnel. Două oglinzi plane, de foarte bună calitate, sunt aproape una în prelungirea celeilalte (unghiul α foarte mic). O sursă luminoasă S se află la distanţa $OS = r$ faţă de muchia comună O, iar imaginile sale S_1 şi S_2 (foarte apropiate) în cele două oglinzi joacă rol de surse coerente.

Dacă distanţa OE (E = ecran) se notează cu $D(\gg r)$ să se arate că:

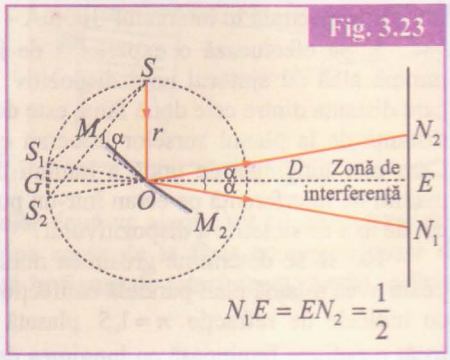
a) punctele S, S_1 şi S_2 se află pe cercul de rază r cu centrul în O;

b) unghiul S_1OS_2 este egal cu 2α.

c) Să se calculeze distanţa S_1S_2.

d) Să se calculeze interfranja pe ecran, precum şi lărgimea zonei de interferenţă (l).

Fig. 3.23



Soluţie: a) Deoarece S_1 şi S_2 sunt simetricele lui S faţă de OM_1 şi OM_2 proprietatea este evidentă.

b) Deoarece $S_1S \perp OM_1$ iar $S_2S \perp OM_2$ rezultă că unghiul $S_1SS_2 = \alpha$, iar unghiul la centru (O), care subîntinde acelaşi arc S_1S_2 este $\sphericalangle S_1OS_2 = \alpha = \sphericalangle N_1ON_2$

c) $|S_1S_2| = 2r\sin\alpha \approx 2r\alpha$

d) $|OG| = r\cos\alpha \approx r$, iar $|GE| = 2r\cos\alpha + D \approx r + D$.

Folosind expresia cunoscută a interfranjei, avem: $i = \frac{\lambda(r+D)}{2r\alpha}$.

Deschiderea zonei de interferenţă este $N_1N_2 = l = 2D\alpha$. Numărul de interfranje din zonă este $n = \frac{l}{i} = \frac{4rD\alpha^2}{\lambda(r+D)}$.

Când $D \to \infty$, $n_\infty \to \frac{4r\alpha^2}{\lambda}$. Când $D = r$, $n_0 \to \frac{2r\alpha^2}{\lambda}$ astfel că $n_\infty = 2n_0$.

Întrebări şi probleme propuse

1. De ce este necesar ca undele care interferă să fie coerente pentru a obţine fenomenul de interferenţă?

2. Care sunt modalităţile de obţinere a undelor coerente în optică?

3. Cum se modifică interfranja în cazul unui dispozitiv Young dacă întregul dispozitiv se cufundă în apă? ($n_{apă} = 4/3$)

4. De ce interferenţa pe lame subţiri se mai numeşte şi localizată?

5. Cum poate fi folosită pana de aer la controlul planeităţii suprafeţelor?

6. Se realizează experimentul Young folosind radiaţia optică având lungimea de undă $\lambda = 500$ nm. Acoperind una dintre fantele dispozitivului cu un film transparent dintr-un material cu indicele de refracţie $n = 1,4$, franja luminoasă de ordinul zero se deplasează cu 3,6 interfranje faţă de poziţia iniţială. Calculaţi:
a) variaţia drumului optic datorată prezenţei filmului transparent; **b)** grosimea filmului transparent.

7. Într-o experienţă de tip Young, în care se foloseşte radiaţia optică cu lungimea de undă de 550 nm, franja luminoasă centrală se obţine exact pe axa de simetrie a sistemului. Când în faţa uneia dintre fante se aşează o lamă subţire cu indicele de refracţie $n = 1,45$, se constată că franja centrală luminoasă ia locul celei de-a patra franje luminoase. Calculaţi grosimea lamei folosite.

8. Cu ajutorul unui dispozitiv Young se observă pe un ecran interferenţa luminii monocromatice furnizată de un filtru verde şi se constată că valoarea interfranjei pentru o lungime de undă de 550 nm este de 0,2 cm. Să se determine lăţimea pe care se întinde maximul de ordinul întâi atunci cand este utilizată lumină albă dacă se cunoaşte că spectrul vizibil are o întindere spectrală în intervalul 3000 Å – 8000 Å.

9. Se efectuează o experienţă de interferenţă în lumină albă cu ajutorul unui dispozitiv Young pentru care distanţa dintre cele două fante este de 0,05 mm, iar distanţa de la planul surselor la ecran este de 1,5 m. Care este lungimea de undă a luminii care va da un maxim de interferenţă pe ecran într-un punct situat la 5 cm de axa de simetrie a dispozitivului?

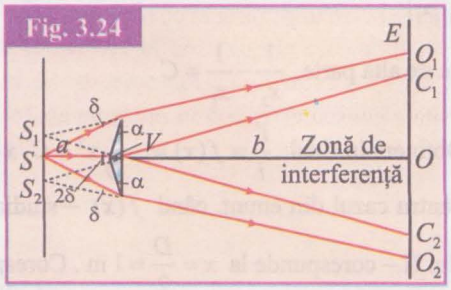
10. Să se determine grosimea minimă pe care o poate avea o lamă plan-paralelă confecţionată din sticlă cu indicele de refracţie $n = 1,5$ plasată în aer, astfel încât o radiaţie luminoasă cu lungimea de undă, în aer, de 0,6 μm, care cade normal pe una din feţele lamei, să determine prin reflexii pe ambele feţe ale lamei un maxim de interferenţă.

11. Examinând franjele de interferenţă produse de o pană optică confecţionată din sticlă cu indicele de refracţie $n = 1,5$ şi plasată în apă ($n_{apă} = 4/3$) se constată că valoarea interfranjei este 0,5 mm. Cunoscând că lungimea de undă a radiaţiei monocromatice utilizate în apă este $\lambda = 500$ nm, să se determine unghiul format de feţele penei optice.

12. O peliculă subţire de benzină pluteşte pe suprafaţa apei. Să se afle cu cât diferă grosimea peliculei de benzină pentru două maxime vecine dacă se cunoaşte că indicele de refracţie al benzinei este de 1,4 şi lungimea de undă folosită este $\lambda = 700$ nm.

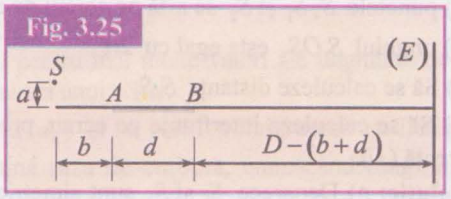
13. În faţa unei biprisme Fresnel, la distanţa a se află o sursă punctiformă de lumină monocromatică cu lungimea de undă λ. În spatele biprismei, la o distanţă b, se află ecranul de observaţie a figurii de interferenţă. Să se determine interfranja i cunoscând indicele de refracţie n al biprismei şi unghiul α, de la baza triunghiului isoscel al biprismei, considerat foarte mic. Care este lărgimea zonei de interferenţă pe ecran?

Fig. 3.24



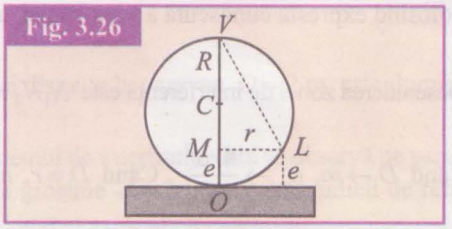
14. Un dispozitiv interferenţial este format dintr-o sursă luminoasă punctiformă S, o oglindă plană AB (de foarte bună calitate) şi un ecran E, dispuse ca în fig. 3.25. Se dau: $a = 1$ mm, $b = 4$ cm, $d = 6$ cm, $D = 1$ m. Să se determine extremităţile şi dimensiunea transversală a figurii de interferenţă pe ecran, precum şi interfranja, respectiv numărul de interfranje în zonă, ştiind că sursa S emite radiaţii monocormatice cu $\lambda = 600$ nm. Precizaţi natura stării de interferenţă în mijlocul zonei de interferenţă.

Fig. 3.25



15. O lamă de sticlă cu feţe plan-paralele este aşezată sub o lentilă biconvexă subţire. Observându-se inelele lui Newton în lumina reflectată cu $\lambda = 589$ nm s-a constatat că raza inelului întunecat de ordinul $k = 20$ este $r_1 = 2$ mm. Aşezând lentila în poziţie inversă, pentru raza aceluiaşi inel s-a măsurat valoarea $r_1' = 4$ mm. Ştiind că indicele de refracţie al lentilei este $n = 1,5$, să se determine distanţa focală a lentilei.

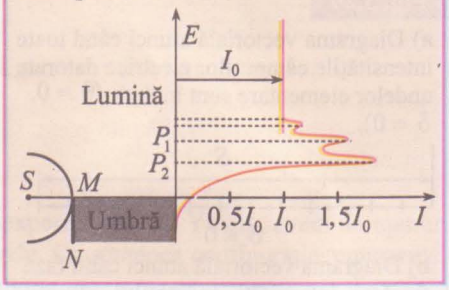
Fig. 3.26



3.5* DIFRACȚIA LUMINII

Fenomenul de difracție a luminii a fost observat în anul 1665 de F. M. Grimaldi și poate fi explicat ca o consecință a principiului Huygens-Fresnel. Acest fenomen constă în ocolirea aparentă de către lumină a obstacolelor atunci când dimensiunile acestora sunt comparabile ca ordin de mărime cu lungimea de undă a luminii folosite. Acest fenomen fizic, inseparabil de cel de interferență, este destul de dificil de evidențiat în cazul luminii din cauza lungimilor de undă mici ale acesteia. Totuși, daca priviți o sursă de lumină îndepărată printr-o țesătură se pot observa o serie de irizații datorate fenomenului de difracție.

Fig. 3.27
Difracția la marginea unui paravan



Se observă că în spatele unui paravan (fig. 3.27) trecerea de la lumină la umbră nu se face instantaneu, ci se trece printr-o zonă de penumbră, iluminarea scăzând pe măsură ce înaintăm în zona umbrei geometrice.

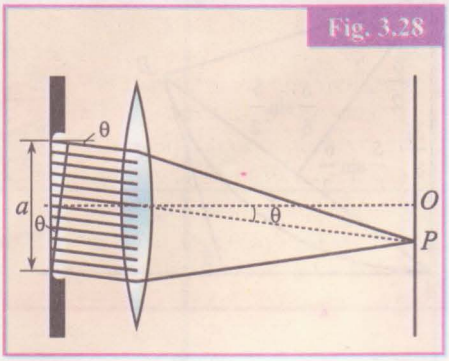
Lumina care pornește de la izvorul S în toate direcțiile și care, în absența paravanului opac MN, ar da pe ecranul E în punctul P o intensitate constantă I_0, dă în prezența acestuia $0,25I_0$, scăzând continuu până la zero în regiunea de umbră, iar în regiunea luminoasă se obțin maxime și minime de intensitate, primul maxim, din P_1, depășind valoarea I_0. Cauza acestui fenomen observat este difracția care are loc la marginea paravanului MN.

Difracția luminii pe o fantă în lumină paralelă

Fenomenul de difracție în lumină paralelă a fost studiat de Fraunhofer. El a observat că privind printr-o fantă îngustă, dreptunghiulară, un izvor luminos îndepărtat, imaginea acestuia se deformează foarte mult pe măsură ce fanta se îngustează.

Pentru ca fasciculul de lumină incident pe fantă să fie paralel, se poate așeza o lentilă în fața fantei. Câteva aspecte ale difracției Fraunhofer printr-o fantă pot fi ușor deduse.

Fig. 3.28



Considerăm întâi două fâșii înguste, una chiar deasupra muchiei de jos a fantei și alta în centrul ei. Diferența de drum până în punctul P din fig. 3.28 este

$$\delta = \frac{a}{2}\sin\theta$$

unde a este lărgimea fantei. Să presupunem că diferența de drum este egală cu $\frac{\lambda}{2}$.

Lumina provenită de la aceste două fâșii ajunge în P cu o diferență de jumătate de perioadă și are loc o anihilare.

În mod similar, lumina de la două fâșii aflate chiar deasupra primelor două va ajunge tot cu un defazaj de o jumătate de perioadă și, astfel, lumina de la fiecare fâșie o va anihila pe aceea de la fâșia corespunzătoare din jumătatea de jos, rezultând o anulare completă și dând o franjă întunecată în figura de interferență. Astfel, o franjă întunecată apare când:

$$\frac{a}{2}\sin\theta = \frac{\lambda}{2} \text{ sau } \sin\theta = \frac{\lambda}{a} \quad (1)$$

De asemenea, putem împărți fanta în sferturi, șesimi etc. Condiția de a avea o franjă întunecată este:

$$\sin\theta = \frac{n\lambda}{a}, \text{ unde } n = 1,2,3,... \quad (2)$$

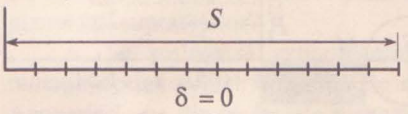
La mijlocul distanței dintre franjele întunecate se află franje luminoase. Observăm, de asemenea, că pentru $\sin\theta = 0$ obținem o bandă luminoasă deoarece în acest caz lumina de la întreaga fantă ajunge în P în fază. Astfel franja centrală luminoasă este de două ori mai lată decât celelalte.

Pentru a calcula distribuția completă a intensității luminoase în figura de difracție produsă de o singură fantă, ne imaginăm din nou un front de undă plan aflat în dreptul fantei și împărțit într-un număr mare de fâșii, fiecare fâșie

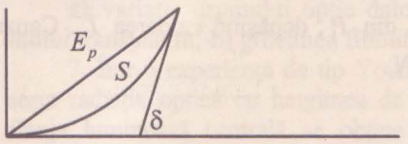
trimiţând raze în toate direcţiile către lentilă, după cum se arată în figura 3.29. Dacă alegem pe ecranul din planul focal al lentilei un punct arbitrar P, numai acele raze care fac un unghi θ cu axa lentilei vor ajunge în P. Figura 3.29a reprezintă diagrama vectorială, care arată că, atunci când fanta este împărţită în 14 secţiuni şi fiecare secţiune emite câte o undă Huygens la unghiul $\theta = 0$, toate undele secundare ajung în fază. Amplitudinea rezultantă a intensităţii câmpului electric în O este notată cu S.

Fig. 3.29

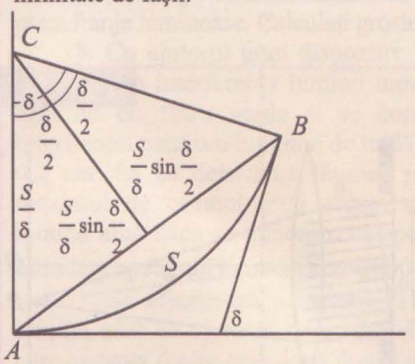
a) Diagrama vectorială atunci când toate intensităţile câmpurilor electrice datorate undelor elementare sunt în fază ($\theta = 0$, $\delta = 0$).



b) Diagrama vectorială atunci când faza fiecărei intensităţi acâmpului electric datorat undelor elementare diferă puţin de precedenta.



c) Limita atinsă de diagrama vectorială atunci când fanta este subîmpărţită într-o infinitate de fâşii.



Păstrând aceeaşi împărţire a frontului de undă în 14 fâşii şi considerând undele secundare care formează unghiul θ şi ajung în P, va exista o mică diferenţă de fază între intensităţile câmpurilor electrice din P datorate undelor secundare succesive; diagrama vectorială corespunzătoare este arătată în fig. 3.29b. Suma S este acum perimetrul unei porţiuni a unui poligon cu multe laturi, iar E_P, amplitudinea intensităţii câmpului electric rezultant în P este coarda. Unghiul δ reprezintă diferenţa de fază dintre unda de la prima fâşie de jos şi unda de la ultima fâşie de sus.

La limită, atunci când numărul fâşiilor în care este împărţită fanta creşte, diagrama vectoriala devine un *arc de cerc*, după cum se arată în fig. 3.29c, cu lungimea arcului S, egală cu o constantă. Construind perpendicularele în A şi B, se găseşte centrul C al arcului de cerc. Raza cercului din care face parte arcul S este S/δ, iar amplitudinea rezultantă E_P (distanţa AB) este $2(S/\delta)\sin(\delta/2)$. Atunci avem:

$$E_P = \frac{\sin\frac{\delta}{2}}{\frac{\delta}{2}} \cdot S$$

unde δ este diferenţa de fază dintre cele două raze care pornesc din marginile fantei.

Într-un anumit punct, diferenţa de fază dintre vibraţiile produse de două unde care au pornit în fază din aceeaşi sursă şi au parcurs drumuri diferite este produsul dintre $2\pi/\lambda$ şi diferenţa de drum. Din fig. 3.28 vedem că diferenţa de drum dintre raza de la marginea de sus a fantei şi cea de la marginea de jos este $a\sin\theta$.

Deci:

$$\delta = \frac{2\pi}{\lambda} a\sin\theta \qquad (3)$$

şi

$$E_P = S\frac{\sin[(\pi a\sin\theta)/\lambda]}{(\pi a\sin\theta)/\lambda}$$

Deoarece intensitatea I este proporţională cu *pătratul* amplitudinii,

$$I = I_0\left[\frac{\left(\sin\frac{\pi a}{\lambda}\sin\theta\right)}{\frac{\pi a}{\lambda}\sin\theta}\right]^2 \qquad (4)$$

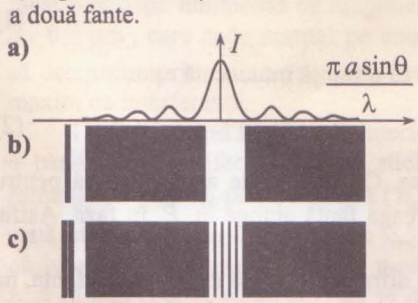
unde I_0 este intensitatea in punctul O din fig. 3.28 pentru care $\theta = 0$.

Ecuaţia (4) este reprezentată în fig. 3.30a şi, imediat sub ea, este prezentată o fotografie a unei figuri de difracţie. Observăm că cea mai mare parte a luminii este concentrată în regiunea din apropierea punctului unde $\theta = 0$, care este chiar focarul geometric. Din ecuaţia (4) rezultă că cea mai mică valoare a lui $(\pi a\sin\theta)/\lambda$ pentru care intensitatea este zero, este valoarea π. Aceasta corespunde unei valori a lui θ egală cu θ_1 dată de:

$$\sin\theta_1 = \frac{\lambda}{a}$$

Fig. 3.30

a) Distribuţia intensităţii.
b) Fotografia unei figuri de difracţie Frauhofer a unei singure fante.
c) Figura de difracţie Frauhofer a două fante.



Deoarece λ este de ordinul a $5 \cdot 10^{-5}$ cm, iar lărgimea tipică a unei fante este 10^{-2} cm, $\sin\theta_1$ este de obicei atât de mic încât $\sin\theta_1 \approx \theta_1$ şi $\theta_1 = \frac{\lambda}{a}$.

Atunci când a este de câţiva centimetri, θ_1 este atât de mic încât se poate considera că practic toată lumina este concentrată în focarul geometric.

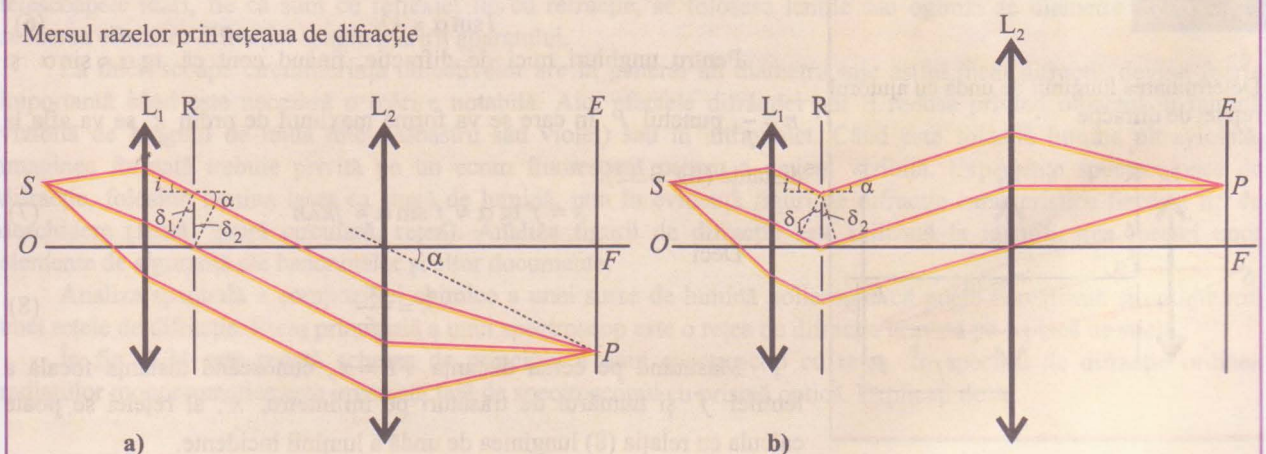
3.6* REŢEAUA DE DIFRACŢIE. APLICAŢII

Să presupunem că, în loc de o fantă sau de două fante apropiate, ca în experimentul lui Young, avem un număr foarte mare de fante paralele, toate de aceeaşi lărgime şi aflate la distanţe egale. O asemenea configuraţie, cunoscută sub numele de *retea de difracţie*, a fost construită pentru prima oară de Fraunhofer.

O reţea de difracţie se poate obţine prin trasarea pe sticlă sau plexiglas a unor trăsături egale şi echidistante. Intervalele transparente dintre zgârieturi reprezintă fantele. Dacă notăm N numărul de trăsături practicate pe lungimea L a reţelei, atunci reţeaua va avea $n = \frac{N}{L}$ trăsături pe unitatea de lungime. Distanţa $l = \frac{L}{N} = \frac{1}{n}$ dintre două trăsături consecutive se numeşte constanta reţelei. În fig. 3.31a şi b este reprezentat mersul razelor de lumină provenite de la o sursă monocromatică printr-o reţea de difracţie (R).

Fig. 3.31

Mersul razelor prin reţeaua de difracţie



Se observă că fasciculul de lumina provenit de la sursa (S), monocromatică, este transformat într-un fascicul paralel de către lentila convergenta L_1, iar obţinerea figurii de difracţie pe ecranul E se face cu ajutorul lentilei L_2, aşezând ecranul în planul ei focal.

Ne vom referi acum la undele secundare emise dupa o singură direcţie, care formează unghiul α cu axul optic al sistemului, de către două fante succesive ale reţelei. Între aceste unde va exista mereu o diferenţă de drum optic:

$$\delta = \delta_1 - \delta_2 \qquad (1)$$

unde $\delta_1 = l \sin i$ reprezintă diferenţa de drum optic între undele incidente pe reţea, iar $\delta_2 = l \sin\alpha$ reprezintă diferenţa de drum dintre undele difractate sub unghiul α. Deci:

$$\delta = l(\sin i - \sin\alpha) \qquad (2)$$

Pentru ca în punctul P de pe ecran să se obţină un maxim prin compunerea pe ecran a tuturor fasciculelor ce provin de la cele N fante, difractate sub acelaşi unghi α, trebuie ca

$$\delta = k\lambda,\ k = 0, 1, 2, \ldots \qquad (3)$$

Pentru obținerea unui minim întunecat trebuie ca:

$$\delta = (2k+1)\frac{\lambda}{2},\ k = 0,1,2,... \tag{4}$$

Având în vedere fenomenul de difracție al tuturor celor N fascicule, putem spune că pentru toate direcțiile pentru care

$$\delta = l(\sin i \pm \sin\alpha) = k\lambda,\ k = 0,1,2,... \tag{5}$$

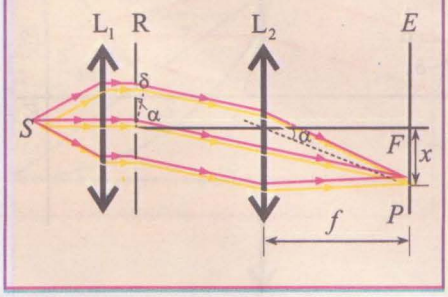
obținem pe ecran maxime de difracție.

Dacă iluminăm rețeaua cu lumină albă, relația (5) arată ca pentru un ordin de difracție k dat, diferitele lungimi de undă vor avea maximul de intensitate sub diferite unghiuri, astfel că pe ecranul E se va forma spectrul continuu al fasciculului incident. Numai maximul central ($k = 0$) va rămâne alb pentru că el se formează în același loc pentru toate lungimile de undă.

Spre deosebire de prisma optică, unde prin dispersia luminii albe se obține un singur spectru, la rețeaua de difracție se formează un număr de spectre de o parte și de alta a maximului central. Spectrele corespunzătoare lui $k = 1$ se numesc de ordinul 1, cele pentru $k = 2$ se numesc de ordinul 2 etc. Spectrele colorate sunt separate de minime întunecate și este posibil ca de la un anumit ordin ele să apară suprapuse. Ordinea culorilor pe ecran este de la violet la roșu pentru că $\lambda_{violet} < \lambda_{roșu}$ și deci $\delta_{violet} < \delta_{roșu}$. Pentru a produce o deviere apreciabilă a luminii, constanta rețelei trebuie să fie de același ordin de mărime cu lungimea de undă a luminii folosite. Rețelele folosite în spectrul vizibil sau în apropierea lui au între 500 și 1500 trăsături pe milimetru. Rețeaua de difracție se folosește mult în spectroscopie, în locul prismei, pentru a obține separarea unui fascicul de lumină în lungimile de undă componente, acestea putând fi calculate dacă se cunoaște valoarea unghiului de deviație.

Determinarea lungimii de undă cu ajutorul rețelei de difracție (experiment)

Fig. 3.32



Determinarea lungimii de undă cu ajutorul rețelei de difracție

În cazul în care $i = 0$, relația (5) devine:

$$l\sin\alpha = k\lambda \tag{6}$$

Pentru unghiuri mici de difracție, ținând cont că $\operatorname{tg}\alpha \approx \sin\alpha$ și $n = \frac{1}{l}$, punctul P în care se va forma maximul de ordin k se va afla la distanța (fig. 3.32):

$$x = f\operatorname{tg}\alpha \approx f\sin\alpha \approx fk\lambda n \tag{7}$$

Deci

$$\lambda = \frac{x}{kfn} \tag{8}$$

Măsurând pe ecran distanța $FP = x$, cunoscând distanța focală a lentilei f și numărul de trăsături pe milimetru, n, al rețelei se poate calcula cu relația (8) lungimea de undă a luminii incidente.

Influența difracției asupra formării imaginii
Alte aplicații ale fenomenului

Într-un sistem optic, datorită diafragmelor indispenabile funcționării acestuia, imaginile obținute pot fi influențate de fenomenul de difracție a luminii. Este posibil ca în locul unde ar trebui să se formeze imaginea punctiformă să apară o figură de difracție sub forma unei mici pete circulare înconjurată de cercuri luminoase și întunecoase de intensități din ce în ce mai mici.

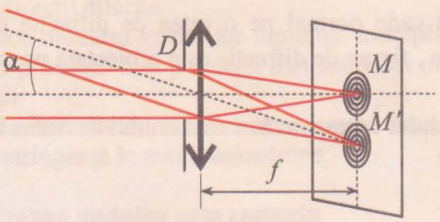
În fig. 3.33a) se vede formarea imaginilor a două puncte îndepărtate ce trimit pe lentilă, prin deschiderea diafragmei D, două fascicule paralele, care formează între ele unghiul α.

În M și M', în locul unor imagini punctiforme apar două figuri de difracție distincte. Pentru a observa existența celor două imagini, trebuie ca între cele două pete centrale luminoase să existe un interval întunecos.

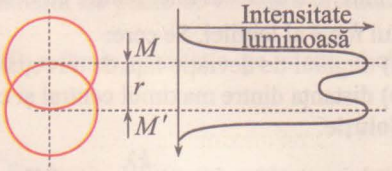
Pentru aceasta trebuie ca distanța MM' să fie cel puțin egală cu raza r a cercului central luminos (fig. 3.33b).

Fie α_m valoarea unghiului α pentru care este satisfăcută condiția de mai sus; ea va reprezenta cel mai mic unghi sub care se văd două puncte ce mai pot fi distinse în imagine.

Fig. 3.33



a) Influența difracției asupra formării imaginilor.



b) graficul intensității luminoase.

Din figură se vede că:

$$r = \alpha_m f \tag{9}$$

unde f este distanța focală a lentilei. Un calcul matematic exact conduce la:

$$\alpha_m = \frac{0,61\lambda}{h} \tag{10}$$

unde λ este lungimea de undă a luminii incidente și h este raza deschiderii fasciculului incident.

Un instrument optic va avea o putere separatoare cu atât mai mare cu cât va putea distinge puncte mai apropiate.

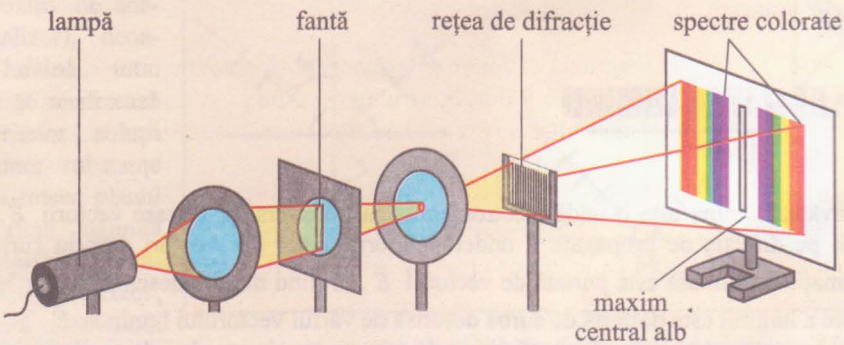
Lentilele acționează ca deschideri circulare și undele luminoase sunt difractate la trecerea prin ele. Raportul dintre diametrul lentilei și lungimea de undă a luminii care trece prin ea determină mărimea imaginii de difracție pentru lentilă. Cu cât acest raport este mai mic, cu atât se va difracta mai mult lumina. Puterea de rezoluție a lentilelor poate fi crescută fie prin creșterea dimensiunilor lentilei fie prin utilizarea unor lungimi de undă mai mici. La telescoapele mari, fie că sunt cu reflexie, fie cu refracție, se folosesc lentile sau oglinzi de diametre mari pentru scăderea efectelor difracției asupra măririi aparatului.

La microscoape circumferința obiectivelor are în general un diametru mic astfel încât difracția devine foarte importantă când este necesară o mărire notabilă. Aici efectele difracției pot fi reduse privind obiectul în lumină vizibilă de lungimi de undă mici (albastru sau violet) sau în ultraviolet. Când este folosită lumina ultravioletă, imaginea formată trebuie privită pe un ecran fluorescent pentru a deveni vizibilă. Experiențe spectaculoase de difracție, folosind lumina laser ca sursă de lumină, pun în evidență figuri de difracție caracteristice fiecărui tip de deschidere (fantă, gaură circulară, rețea). Analiza figurii de difracție este utilizată la identificarea formei unor elemente de siguranță ale bancnotelor și altor documente.

Analiza spectrală a compoziției chimice a unei surse de lumină policromatică poate fi realizată și cu ajutorul unei rețele de difracție. Piesa principală a unui spectroscop este o rețea de difracție gravată pe o placă de sticlă.

În fig. 3.34 este redată schema de principiu a unui spectroscop cu rețea. În spectrul de difracție ordinea radiațiilor monocromatice este inversată față de spectroscopul cu prismă optică. Explicați de ce.

Fig. 3.34



Exercițiu aplicativ

Enunț: Un fascicul paralel monocromatic ($\lambda = 650$ nm) cade normal pe o rețea de difracție cu constanta $l = 0{,}1$ mm. Cu ajutorul unei lentile cu distanța focală $f = 0{,}3$ m, figura de difracție este proiectată pe un ecran aflat în planul focal al lentilei. Se cere:

a) unghiul de deviație față de direcția de incidență a fasciculului corespunzător maximului de ordin 5;

b) distanța dintre maximul central și cel de ordin 1.

Soluție:

a) $l \sin\alpha = k\lambda$; $\sin\alpha = \frac{k\lambda}{l}$; $\alpha = 21^\circ$;

b) $x = \frac{k\lambda f}{l} = 19{,}5$ mm.

Întrebări și probleme propuse

1. Explicați producerea fenomenului de difracție. Poate fi el separat de interferență?

2. Cum influențează difracția obținerea imaginilor prin instrumente optice?

3. De ce se folosește rețeaua de difracție în spectroscopie?

4. Care este numărul minim de trăsături pentru o rețea de difracție cu constanta $l = 2{,}9$ μm cu care se pot separa componentele dubletului galben al sodiului: $\lambda_1 = 5890$ Å, $\lambda_2 = 5896$ Å ?

5. O rețea de difracție are 5000 trăsături/cm. Lungimea de undă a luminii care cade normal pe rețea este $\lambda = 500$ nm. Se cer:

a) unghiul de difracție pentru maximul de ordin 2;

b) ordinul maxim al spectrului obținut;

c) poziția franjei corespunzătoare ordinului maxim de difracție față de maximul central, dacă lentila folosită pentru observarea figurii de interferență are distanța focală $f = 120$ nm și este așezată paralel cu rețeaua de difracție. Ecranul este așezat în planul focal al lentilei.

6. O sursă punctiformă emite un fascicul de lumină monocromatică. O lentilă plan-convexă confecționată din sticlă ($n_s = 1{,}5$) și cu raza de curbură $R = 32$ cm, transformă fasciculul într-un fascicul paralel ce cade normal pe o rețea optică cu 400 trăsături/ mm.

Știind că unghiul dintre direcția razelor incidente și a razelor ce formează maximul de ordinul 2 este $\alpha = 30^\circ$, se cer:

a) distanța L la care trebuie așezată sursa față de lentilă pentru a se obține fasciculul de lumină paralelă;

b) lungimea de undă a luminii incidente.

7. Câte maxime se pot forma de fiecare parte a maximului central de difracție atunci când se lucrează cu o rețea optică cu 400 trăsături / mm la incidență normală și cu lumină având $\lambda = 500$ nm ?

8. Să se determine lungimea de undă a unei radiații știind că, în spectrul de difracție de ordinul 3 dat de o rețea, linia spectrală respectivă coincide cu cea pentru $\lambda_1 = 486{,}1$ nm din spectrul de ordinul al patrulea dat de aceeași rețea.

9. Un filtru special permite iluminarea unei rețele de difracție cu două radiații monocromatice având lungimile de undă de 425 nm și 450 nm. Să se determine ordinul de difracție, pentru radiația monocromatică de 425 nm, pentru care are loc prima suprapunere a maximelor de interferență, diferită de maximul central.

10. Să se determine numărul total de maxime de difracție obținute cu ajutorul unei rețele de difracție, având 200 trăsături/mm și al unei radiații monocromatice cu lungimea de undă de 0,6 μm care cade la incidență normală pe planul trăsăturilor.

3.7* POLARIZAREA LUMINII

Așa cum ați învățat, lumina este o undă electromagnetică transversală, în care vectorii $\vec{E}$ și $\vec{B}$ oscilează în plane perpendiculare pe direcția de propagare a undei. Vârfurile celor doi vectori descriu curbe în planul lor de oscilație. Cum informația luminoasă este purtată de vectorul $\vec{E}$, el fiind numit adesea și vector luminos, vom spune că starea de polarizare a luminii este definită de curba descrisă de vârful vectorului luminos $\vec{E}$.

Lumina total polarizată este lumina formată din unde care au un singur plan de oscilație pentru vectorul câmp electric $\vec{E}$.

Lumina parțial polarizată este lumina ce conține, cu mai mare probabilitate, un plan de oscilație pentru $\vec{E}$ paralel cu o direcție dată și cu mai mică probabilitate alte plane de oscilație ce intersectează planul de polarizare de-a lungul unor direcții diferite.

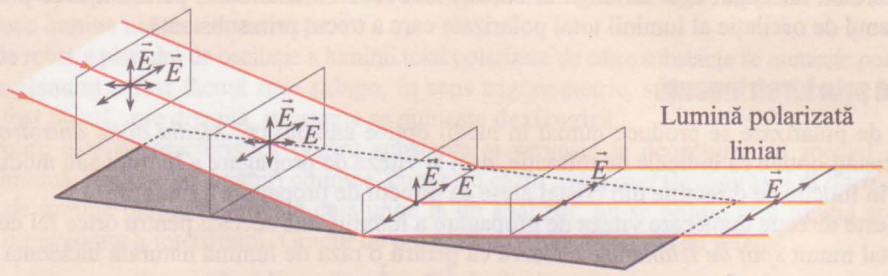
Deoarece numărul vectorilor luminoși îndreptați după alte direcții este mai mic, această situație se reprezintă convențional prin linii mai puține și mai scurte în mod proporțional cu numărul de plane de oscilație orientate după aceste direcții.

Polarizarea undelor luminoase se poate face în mai multe moduri: reflexie, refracție pe medii dielectrice izotrope, birefringență în medii anizotrope.

Polarizarea undelor prin reflexie

Fie o rază de lumină naturală, nepolarizată, ce cade sub un unghi de incidență i pe suprafața reflectantă a unei substanțe dielectrice, omogene și izotrope (fig. 3.35).

Fig. 3.35



După reflexie se obține o rază parțial polarizată, fapt ce se explică prin aceea că oscilațiile vectorului $\vec{E}$, care în planul de polarizare sunt paralele cu planul de reflexie, sunt reflectate în totalitate fără pierderi.

Oscilațiile vectorului $\vec{E}$ care ajung perpendicular pe suprafața reflectantă sunt absorbite într-o măsură mai mare sau mai mică, în funcție de unghiul de incidență.

Dupa reflexie vom avea în mod predominant vectori cu direcția de oscilație paralelă cu planul reflectant.

Polarizarea totală a undei reflectate se obține doar într-un singur caz: când între unda reflectată și unda refractată de mediul dielectric se formeaza un unghi de $\frac{\pi}{2}$.

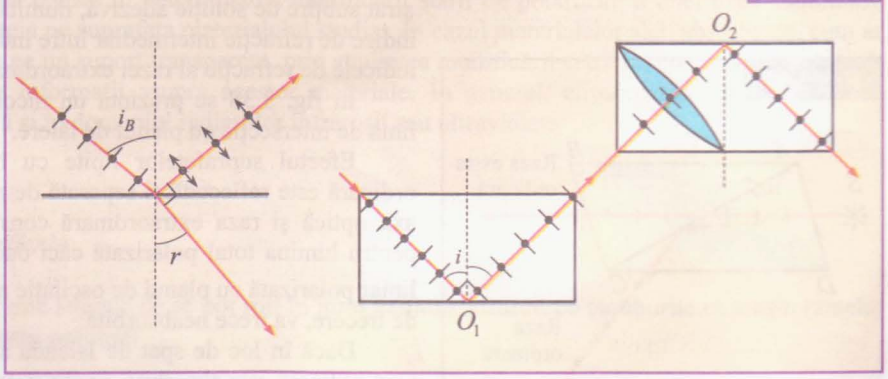
Pentru un mediu dielectric cu indicele de refracție relativ dat, există un singur unghi de incidență ce asigură prin reflexie polarizarea totală, numit *unghi brewsterian*, după numele lui Brewster, cel care a explicat acest fenomen:

$$n = \frac{\sin i_B}{\sin r} = \frac{\sin i_B}{\sin(90^\circ - i_B)} = \operatorname{tg} i_B = n, \text{ deci } \operatorname{tg} i_B = n,\ i_B = \operatorname{arctg} n \qquad (1)$$

Pentru sticla cu $n = 1{,}5$ se obține $i = 56^\circ$, pentru alte unghiuri de incidență $i \neq i_B$ se obțin unde reflectate parțial polarizate.

Două oglinzi dielectrice la care incidența razelor de lumină se face sub unghiul *brewster*, constituie un dispozitiv de analiză (polarizor-analizor), deoarece produce lumină total polarizată cu care se analizează comportarea diferitelor soluții transparente ale unor substanțe ale căror molecule rotesc planul de polarizare. Prima oglindă produce raze polarizate liniar (total) și se numește **polarizor**, iar a doua oglindă analizează poziția planului de oscilație după trecerea prin soluție, al undei și este numită **analizor**. În fig. 3.36 se arată dispunerea lor în spațiu.

Fig. 3.36



Prin rotirea celei de-a doua oglinzi (analizorul) cu un unghi α în jurul razei polarizate se obține o intensitate luminoasă nulă la 90°.

Acest fenomen se numește extincție și constă în aceea că după a doua reflexie, raza reflectată dispare complet deși pe oglindă cade lumină.

Extincția se explică prin faptul că la rotirea oglinzii O_2 în jurul razei reflectate O_1O_2, planul oglinzii nu mai este paralel cu planul oglinzii O_1 ci ajunge să fie perpendicular.

Aceasta determină ajungerea vectorului $\vec{E}$ perpendicular pe suprafața reflectantă astfel rotită și lumina este absorbită. În această poziție a oglinzii O_2 între planul de trecere al polarizorului (prima oglindă) și planul de trecere al analizorului (a doua oglindă) există un unghi de 90°. Extincția arată că raza reflectată de prima oglindă a fost total polarizată.

Dacă planul de trecere al analizorului este paralel cu planul de trecere al polarizorului, lumina trece neabsorbită.

Dacă în drumul razei polarizate total se introduce o substanță transparentă, este posibil ca aceasta să rotească planul de polarizare cu un unghi egal cu unghiul cu care trebuie rotit analizorul pentru a avea planul de trecere din nou paralel cu planul de oscilație al luminii total polarizate care a trecut prin substanță.

Polarizarea prin birefringență

Acest mod de polarizare se produce numai în medii optice anizotrope. *Mediu optic anizotrop* este acel mediu pentru care proprietăți optice ca indicele de refracție, deci și viteza de propagare a luminii sau modul de polarizare, se manifestă diferit în funcție de direcțiile din cristal alese ca direcții de propagare a luminii.

Axa optică este direcția după care viteza de propagare a luminii este aceeași pentru orice fel de unde polarizate.

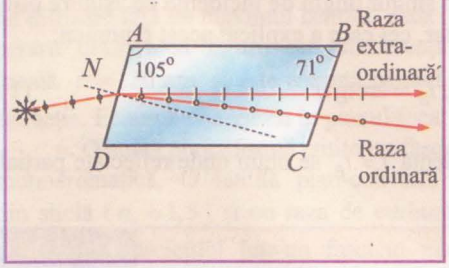
Într-un cristal numit *spat de Islanda* se observă că pentru o rază de lumină naturală incidentă pe una din fețe se obțin prin refracție două unde, fapt ce a dat numele de *dublă refracție* sau *birefringență.*

Se constată că cele două raze sunt total polarizate și au intensități egale cu jumătate din intensitatea inițială, planele lor de oscilație sunt perpendiculare unul pe celălalt și sunt foarte apropiate, ceea ce le face dificil de separat.

Raza care respectă legile refracției se numește rază *ordinară.* Raza care nu respectă legile refracției se numește rază *extraordinară.*

În fig. 3.37 se arată mersul razelor de lumină printr-o placă de spat de Islanda, tăiat sub un anumit unghi față de axa optică a cristalului.

Fig. 3.37



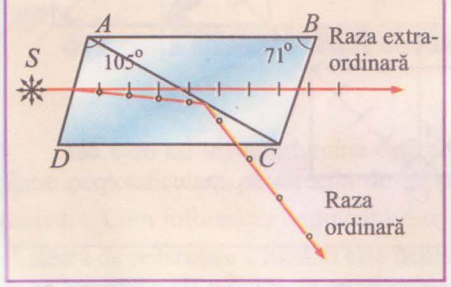
Vectorul $\vec{E}$ din raza ordinară oscilează perpendicular pe planul de incidență format din raza incidentă și axa optică.

Vectorul $\vec{E}$ din raza extraordinară se află în planul ce trece prin axa optică și raza extraordinară, plan ce formează un unghi variabil cu planul de incidență, prin rotirea lamei.

Separarea razei extraordinare de raza ordinară a fost realizată prima dată de *Nicole* cu ajutorul unei prisme numită de atunci *nicol.* Această prismă se obține prin tăierea în două a unui cristal de formă prismatică cu fețe rombice și axă paralelă cu muchia prismei.

Considerând secțiunea principală ca planul ce trece prin una din diagonalele celor două fețe, tăierea prismei se face într-un plan perpendicular pe planul secțiunii principale și apoi se lipesc din nou cu un strat subțire de soluție adezivă, numită *balsam de Canada.* Aceasta are un indice de refracție intermediar între indicele de refracție al razei ordinare și indicele de refracție al razei extraordinare.

Fig. 3.38



În fig. 3.38 se prezintă un nicol prin planul secțiunii principale și linia de intersecție cu planul de tăiere.

Efectul suprafețelor lipite cu balsamul de Canada este că raza ordinară este reflectată și separată de raza extraordinară. Planul format de axa optică și raza extraordinară constituie *planul de trecere* al prismei pentru lumina total polarizată căci dacă sursa S trimite o rază de lumină liniar polarizată cu planul de oscilație al vectorului $\vec{E}$ paralel cu acest plan de trecere, va trece neabsorbită.

Dacă în loc de spat de Islanda se folosește un cristal de *turmalină,* raza ordinară este absorbită, proprietate numită **dicroism.**

Cristalele foarte mici de *iodosulfat* de *chinină* nu se pot folosi direct la confecționarea de nicoli, ci se introduc într-o soluție de de nitroceluloză

transparentă, care se solidifică în prezența unui câmp electric intens. Acest câmp orientează toate microcristalele cu axa optică pe direcția câmpului electric extern.

Lacul depus în strat subțire pe o placă de sticlă devine un polarizor cu suprafață oricât de mare. Dacă raza iese dintr-un nicol analizor, având planul de trecere paralel cu planul de trecere al primului nicol, oscilația electrică polarizată liniar trece neabsorbită.

Prin rotirea analizorului în jurul razei incidente luată ca axă, se produce o rotire de unghi α a planului de trecere al celui de al doilea nicol care are ca efect slăbirea intensității luminii transmise prin analizor după **legea lui Malus**:

$$I = I_0 \cos^2 \alpha \qquad (2)$$

unde: I – intensitatea luminii ce iese din analizor; I_0 – intensitatea luminii ce cade pe analizor.

Când unghiul $\alpha = \frac{\pi}{2}$ se produce extincția razei de lumină și invers, dacă se produce extincția unei raze liniar polarizate înseamnă că între planele de trecere al polarizorului și al analizorului este un unghi de $90°$.

Dacă între cei doi nicoli cu plane de trecere perpendiculare, se introduce o substanță solidă sau lichidă transparentă, care rotește planul de polarizare, lumina emergentă din al doilea nicol reapare. Prin rotirea analizorului cu un unghi se aduce lumina din nou la extincție.

Fenomenul de rotire a planului de oscilație a luminii total polarizate de către substanțe se numește *polarizare rotatorie.*

Dacă rotația planului a fost făcută spre *stânga*, în sens trigonometric, substanța se numește **levogiră**, iar dacă rotirea planului a fost făcută spre dreapta, substanța se numește **dextrogiră**.

Modul de rotire este o caracteristică pentru substanțe și servește la deosebirea în special a substanțelor cu aceeași formulă chimică, dar cu alte legături chimice, cum este cazul *zaharozei* (levogiră) și al *dextrozei* (dextrogiră).

Pentru raza de lumină parțial polarizată ce ajunge la un analizor, nu se obține prin rotația acestuia o extincție completă, ci doar o micșorare a intensității. Gradul de polarizare se poate calcula cu relația:

$$n = \frac{I_{max} - I_{min}}{I_{max} + I_{min}} \qquad (3)$$

unde I_{max} – intensitatea maximă a luminii ce trece neabsorbită prin analizor; I_{min} – intensitatea minimă a luminii ce trece prin analizator.

Aplicații în știință și tehnică ale fenomenului de polarizare

• **Microscopia în lumină polarizată.** Utilizarea luminii polarizate aduce în microscopie informații foarte prețioase: orientarea diferită a probelor analizate în raport cu direcția oscilațiilor luminoase incidente poate face observabile (utilizând un polariod) structuri invizibile în lumină naturală. Analizarea cu un polarizator și un analizator a luminii transmise prin medii transparente permite identificarea microcristalelor uniaxe sau biaxe și a altor elemente birefringente din probele de analizat.

• **Interferometrie în lumină polarizată.** Pentru studierea unor obiecte transparente cu tensiuni interne se utilizează interferometre cu polarizarea luminii albe. Principiul acestor aparate este următorul: unda de lumină deformată de variațiile de grosime ale obiectului tensionat traversează un sistem birefringent care o dedublează; cu un polarizor și un analizor se realizează interferența celor două unde, făcând să apară detalii ale obiectului transparent.

• **Elipsometria** este o metodă optică, nedistructivă, precisă și de mare sensibilitate de investigare a proprietăților superficiale ale materialelor. Metoda constă în determinarea modificării stării de polarizare a unei unde luminoase incidente ca urmare a reflexiei acesteia pe suprafața materialului studiat. În cazul materialelor slab absorbante, cum ar fi sticlele sau filmele subțiri depuse pe un suport transparent, prin studierea modificării stării de polarizare, ca urmare a transmisiei undei, se pot obține informații asupra acestor materiale. În general, elipsometria este utilizată în domeniul vizibil, dar poate fi extinsă și în domeniul radiațiilor infraroșii sau ultraviolete.

Lucrări de laborator

1. *Polarizarea luminii prin reflexie*

Materiale necesare:

– două oglinzi dielectrice cu rame laterale ce se pot roti în jurul axului constituit pe șuruburile ce susțin ramele, cât și în plan orizontal odată cu suporții oglinzii;

– oglindă metalică;

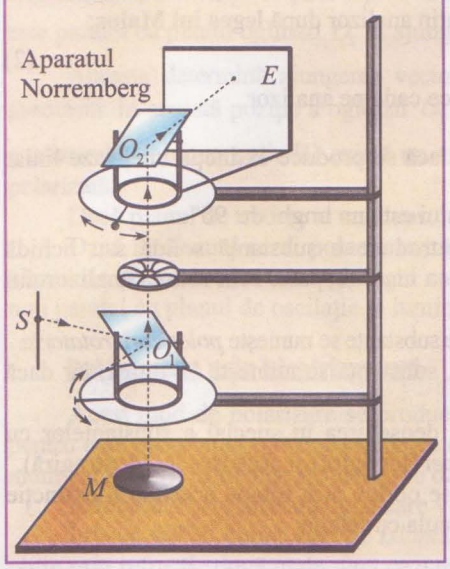
– suporți orizontali și verticali;

– diafragmă tip iris;

– ecran ataşat cadrului oglinzii;
– sursă de lumină albă (de la un aparat de proiecţie, aspectomat etc.);
– diafragmă în faţa sursei.

Modul de lucru:

Fig. 3.39



Se aşează oglinda inferioară O_1 a aparatului Norremberg la o înclinare de cca. 57° faţă de orizontală şi se trimite lumină paralelă de la o sursă S (printr-o fantă circulară). Lumina se reflectă pe oglinda O_1 apoi pe oglinda metalică M şi, trecând prin O_1 cade pe O_2 a cărei normală are o înclinare faţă de raza incidentă egală tot cu 57° (între O_1 şi O_2 se instalează o altă fantă iris pentru colimarea fascicolului reflectat).

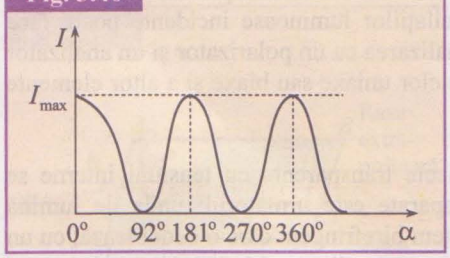
Se roteşte oglinda O_2 şi se observă spotul luminos reflectat pe ecranul solidar cu suportul turnant al oglinzii O_2. Rotaţia se face în jurul direcţiei razei incidente pe această oglindă. Se caută şi se notează poziţiile de maxim şi de minim nul ale intensităţii luminii în timpul unei rotiri complete a oglinzii O_2. Dacă minimele nu sunt nule, nu a fost atins încă unghiul Brewster. Se reia experimentul până la anularea minimelor, modificând uşor înclinarea oglinzii O_1 şi/ sau a oglinzii O_2. Se verifică legea lui Malus pentru valorile extreme ale intensităţii spotului reflectat.

Se măsoară cu precizie unghiul de incidenţă pe O_1 – unghiul Brewster – cu ajutorul unui raportor. Laturile oglinzii O_1 se pot prelungi cu două ace de gămălie introduse în ramă, pentru ca măsurarea cu raportorul să fie cât mai precisă. Înclinarea oglinzii O_2 nu se măsoară. Reflexia pe ea dă minime nule numai dacă unghiul de incidenţă pe ea este tot unghiul Brewster.

Se calculează indicele de refracţie al sticlei din legea Brewster: $\operatorname{tg} i_B = n$; n – indicele de refracţie al lamei de sticlă, aflată în aer.

Determinări şi concluzii:

Fig. 3.40



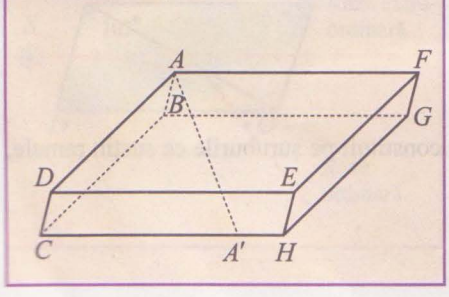
α	I
0°	I_{max}
92°	0 (ext)
181°	I_{max}
270°	0 (ext)
360°	I_{max}

Se verifică legea lui Malus pentru $\alpha = 90°$

2. *Birefrigenţa. Polarizarea rezelor ordinare şi extraordinare*

Materiale necesare:
– oglindă dielectrică pe suporţi;
– sursă de lumină cu fantă circulară;
– cristal de spat de Islanda (calcit).

Fig. 3.41



Teoria metodei:

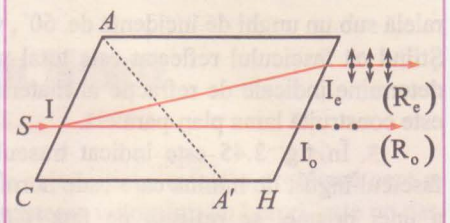
Trecerea unei raze de lumină din aer în anumite medii transparente şi omogene a arătat un fenomen optic nou: dublarea razei de lumină. Asemenea medii sunt anizotrope. Fenomenul a fost numit birefringenţă sau dublă refracţie.

Cristalul de calcit (spat de Islanda) este un cristal romboedric transparent, mărginit de şase feţe rombice, cu unghiurile obtuze de 102° şi cele ascuţite de 78°. Direcţia AA', care formează în A unghiuri egale cu planele celor 3 feţe ce se intersectează în acest punct este axa optică a cristalului. Este singura direcţie S după care o rază de lumină incidentă

nu suferă birefringență (cristalul de calcit este uniax). La intrarea unei raze de lumină prin fața $ABCD$, perpendicular pe aceasta, ea se va despărți în două componente care ies din cristal deplasate, paralele între ele.

Raza II_0 respectă legile refracției la incidență normală și deci trece nedeviată. Ea se numește rază ordinară (R_0). Raza II_e nu respectă legile refracției. Ea este deviată de la direcția inițială chiar când unghiul de incidență este nul. Aceasta este raza extraordinară (R_e). Rotind cristalul în jurul axului reprezentat de direcția fascicolului incident se constată că raza ordinară rămâne fixă, iar cea extraordinară se rotește în jurul acesteia.

Fig. 3.42



Dacă cercetăm cu un analizor cele două raze emergente, constatăm că ele sunt polarizate liniar în plane perpendiculare unul pe altul. Raza extraordinară are vibrațiile în planul secțiunii principale (secțiune din cristal care conține axa optică și raza extraordinară și în unele cazuri, și normala la suprafața în punctul de incidență). Raza ordinară are vibrațiile într-un plan perpendicular pe secțiunea principală. Dacă raza incidentă este naturală, cele două componente: raza ordinară și extraordinară sunt egal de intense.

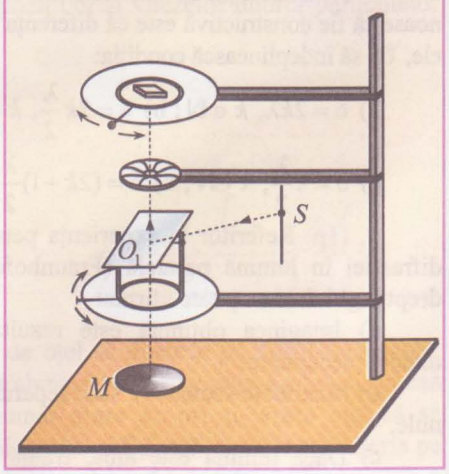
Dacă raza incidentă este polarizată liniar, cele două componente au intensități diferite după valoarea unghiului pe care-l face planul de vibrație al razei, cu planul secțiunii principale. Notând cu α unghiul dintre aceste două plane, componenta extraordinară va avea amplitudinea $\mathcal{A}_e = \mathcal{A}\cos\alpha$, cea ordinară $\mathcal{A}_0 = \mathcal{A}\sin\alpha$, respectivele intensități vor fi: $I_0 = \mathcal{A}^2\sin^2\alpha$; $I_e = \mathcal{A}^2\cos^2\alpha$, iar suma lor va fi egală cu intensitatea fascicolului incident

$$I = I_0 + I_e = \mathcal{A}^2$$

Modul de lucru:

Se așează oglinda O_1 la unghiul Brewster față de fascicolul incident. După reflexie pe oglinda M, raza reflectată trece prin O_1 ajunge pe cristalul de calcit. Se observă cele două imagini ale diafragmei iris prin refracție prin cristal, una corespunzând razei ordinare, cealaltă razei extraordinare. Rotind suportul circular pe care este așezat cristalul, se notează pozițiile de maxim și minim ale intensității celor două imagini și se trag concluzii asupra direcțiilor de vibrație ale celor două raze.

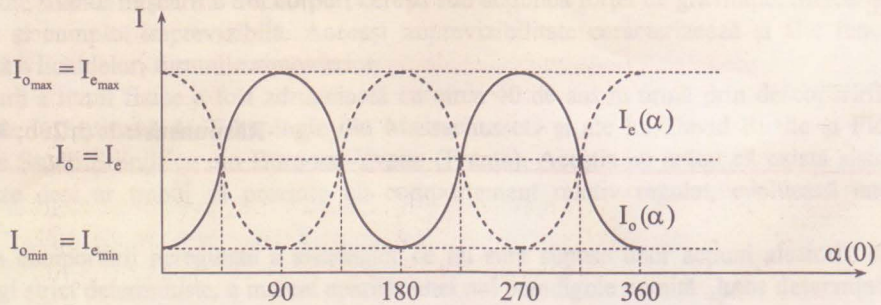
Fig. 3.43



Determinări experimentale:

	I_0	I_e
0°	min	max
47°	I_0	I_e
98°	max	min
133°	I_0	I_e
185°	min	max
234°	I_0	I_e
265°	max	min
310°	I_0	I_e
360°	min	max

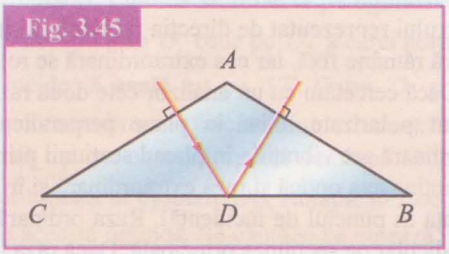
Fig. 3.44



Întrebări şi probleme propuse

1. Ce înţelegeţi prin lumină total polarizată?
2. Ce metode de polarizare a luminii cunoaşteţi?
3. Ce proprietăţi are raza extraordinară?
4. Un fascicul de lumină cade pe o lamă plan-paralelă sub un unghi de incidenţă de 60°, venind din aer. Ştiind că fasciculul reflectat este total polarizat, să se determine indicele de refracţie al materialului din care este construită lama plan-paralelă.
5. În fig. 3.45 este indicat traseul urmat de un fascicul îngust de lumină care cade normal pe faţa AC a unei prisme, se reflectă pe faţa CD şi părăseşte prisma perpendicular pe faţa AB (în punctul D va exista şi un fascicul refractat, dar care nu este important în problema de faţă). Indicele de refracţie al prismei este $\sqrt{3}$. Să se determine unghiul prismei A astfel încât fasciculul reflectat în D să fie total polarizat.

Fig. 3.45



Test sumativ

1. (1p) Valoarea interfranjei obţinute cu ajutorul unui dispozitiv interferenţial Young:
a) scade cu creşterea distanţei de la fante la ecran;
b) creşte o dată cu creşterea distanţei de la fante la ecran;
c) scade cu creşterea lungimii de undă a luminii incidente;
d) creşte o dată cu creşterea distanţei de la fante la ecran.

2. (1p) Condiţia ca interferenţa a două unde luminoase să fie constructivă este ca diferenţa de drum dintre ele, δ, să îndeplinească condiţia:
a) $\delta = 2k\lambda,\ k \in \mathbb{N}$; **b)** $\delta = 2k\dfrac{\lambda}{2},\ k \in \mathbb{N}$;
c) $\delta = k\dfrac{\lambda}{2},\ k \in \mathbb{N}$; **d)** $\delta = (2k+1)\dfrac{\lambda}{2},\ k \in \mathbb{N}$.

3. (1p) Referitor la experienţa pentru observarea difracţiei în lumină paralelă (Fraunhofer) pe o fantă dreptunghiulară se poate afirma:
a) Imaginea obţinută este rezultatul dispersiei undelor secundare.
b) Maximele secundare sunt separate prin minime nule.
c) Dacă lumina este albă, franja centrală va fi întunecată.
d) Maximele secundare au aceeaşi intensitate cu maximul principal.

4. (2p) Să se determine indicele de refracţie al unei lame plan-paralele de grosime 1,4 μm dacă, aşezând lama în dreptul uneia din fantele unui dispozitiv Young, franja centrală ocupă locul în care se afla cea de-a treia franjă întunecată în absenţa lamei. Lumina folosită are $\lambda = 1{,}4\ \mu m$.
a) 2,25; **b)** 1,75;
c) 1,35; **d)** 1,55.

5. (2p) O reţea plană de difracţie cu $n = 400$ trăsături/mm este iluminată la incidenţa normală cu o radiaţie monocromatică având $\lambda = 550$ nm. Ordinul cel mai înalt care se poate observa cu această reţea este:
a) 3; **b)** 4;
c) 5; **d)** 6.

6. (2p) O reţea de difracţie are 800 trăsături/mm şi este iluminată normal cu lumină albă pentru care $\lambda \in [400\text{ nm}, 750\text{ nm}]$. Figura de difracţie se obţine pe un ecran aşezat în planul focal imagine al unei lentile convergente având $f = 2$ cm. În aproximaţia unghiurilor de difracţie mici, lărgimea spectrului de ordin 2 este:
a) $\Delta x_2 = 114$ mm;
b) $\Delta x_2 = 5{,}6$ mm;
c) $\Delta x_2 = 1{,}4\ \mu m$;
d) $\Delta x_2 = 11\ \mu m$.

Oficiu: 1p
Total: 10 p
Răspunsuri: 1. d; **2.** b; **3.** b; **4.** c; **5.** c; **6.** b.

Capitolul IV* ELEMENTE DE TEORIA HAOSULUI

4.1* DETERMINISM ŞI PREDICTIBILITATE. CONDIŢII. MODELE

Prezicerea evoluţiei viitoare a unui sistem fizic, în funcţie de condiţiile sale iniţiale, a fost o problemă care a preocupat dintotdeauna lumea ştiinţei. Dealtfel, într-un sens mai general, cunoaşterea viitorului, fără erori, este un dar pe care toată lumea ar dori să îl posede.

În ceea ce priveşte predicţia evoluţiei ulterioare a unui sistem fizic putem spune că, într-un anumit fel, fizica clasică a reuşit acest lucru. Funcţionarea unui mare număr de maşini de precizie şi fiabilitate are la bază rezultatele sale. Astronomia poate prezice eclipsele de Soare sau de Lună sau mişcarea planetelor pe durata câtorva secole cu o precizie suficient de mare.

După descoperirea legii atracţiei universale, Newton a rezolvat cu succes „problema celor două corpuri" ale cărei soluţii ne arată care va fi mişcarea a două corpuri cereşti aflate în interacţiune gravitaţională.

Din punctul de vedere al determinismului laplaceian, evoluţia viitoare a unui sistem poate fi – cel puţin în principiu – determinată pornind de la starea la un moment dat. Dacă luăm spre exemplu căderea liberă a unei pietre sub acţiunea gravitaţiei terestre, legile mecanicii permit determinarea comportamentului ei: lăsată liberă dintr-o poziţie considerată iniţială, piatra va ajunge pe Pământ într-un punct bine determinat. Dacă schimbăm puţin poziţia iniţială, ea va ajunge la suprafaţa Pământului într-un punct diferit dar apropiat de primul. Altfel spus, traiectoria pietrei va rămâne vecină cu precedenta dacă poziţiile iniţiale îndeplinesc această condiţie.

Datorită acestei viziuni generale de gândire, generaţii de oameni de ştiinţă au crezut în puterea „demonului laplaceian".

Conform determinismului laplaceian cunoaşterea la un moment dat a poziţiilor şi vitezelor tuturor particulelor din Univers dă posibilitatea prezicerii evoluţiei lor viitoare.

4.2* DETERMINISM ŞI IMPREDICTIBILITATE COMPORTAMENTUL HAOTIC. CONDIŢII

Putem genera acum necazuri „demonului lui Laplace" lăsând o bilă de oţel să alunece pe tăişul unei lame. Observăm că, dacă centrul de greutate al bilei este puţin la stânga lamei, bila alunecă pe partea stângă a lamei, în caz contrar ea alunecă pe partea dreaptă. Dacă repetăm experienţa de un număr mare de ori şi lăsăm bila să se rostogolească din puncte uşor diferite vom vedea că este imposibil să determinăm cu suficientă precizie traiectoria pe care o va lua bila. Sistemul fizic descris este **sensibil la condiţiile iniţiale**. Se observă că puterea de precizie a „demonului lui Laplace" s-a pierdut şi că este necesară o schimbare a modului de abordare a fenomenelor. Un alt exemplu îl constituie studiul mişcării a trei corpuri cereşti sub acţiunea forţei de gravitaţie. Mişcarea corpurilor poate deveni neregulată şi complet imprevizibilă. Aceeaşi imprevizibilitate caracterizează şi alte fenomene cum ar fi: curgerea turbulentă a lichidelor, furtunile atmosferice.

Imaginea clară a lumii fizice a fost zdruncinată cu circa 40 de ani în urmă prin descoperirile decisive ale lui Edward Lorentz de la Institutul de Tehnologie din Massachussets şi ale lui David Ruelle şi Floris Takens de la Institutul de Înalte Studii Ştiinţifice din Bure-sur-Yvette (Franţa). Aceştia au arătat că există sisteme guvernate de ecuaţii simple care deşi ar trebui să prezinte un comportament relativ regulat, evoluează uneori într-un mod dezordonat, haotic.

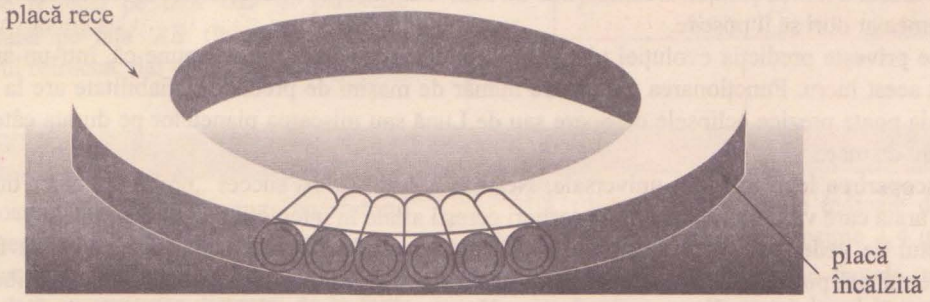
Descoperirea comportării neregulate a sistemelor ce nu sunt supuse unor acţiuni aleatorii, ci din contră, sunt caracterizate de legi strict deterministe, a marcat apariţia unei noi paradigme numită **„haos determinist"**. Haosul deter-

minist, a cărui existenţă, la sfârşitul secolului trecut, a fost prezisă de către matematicianul francez Hadamard şi apoi de Henri Poincaré, este la originea interpretării, după 1970, a multora dintre fenomenele ce par că scapă oricărei predicţii.

Cercetările cuprind astăzi domenii foarte diferite: fizica, chimia, biologia, chiar şi sociologia care încearcă să găsească o serie de reguli comune pentru diferitele comportamente în scopul găsirii unei posibilităţi de predicţie şi control al fenomenelor sociale.

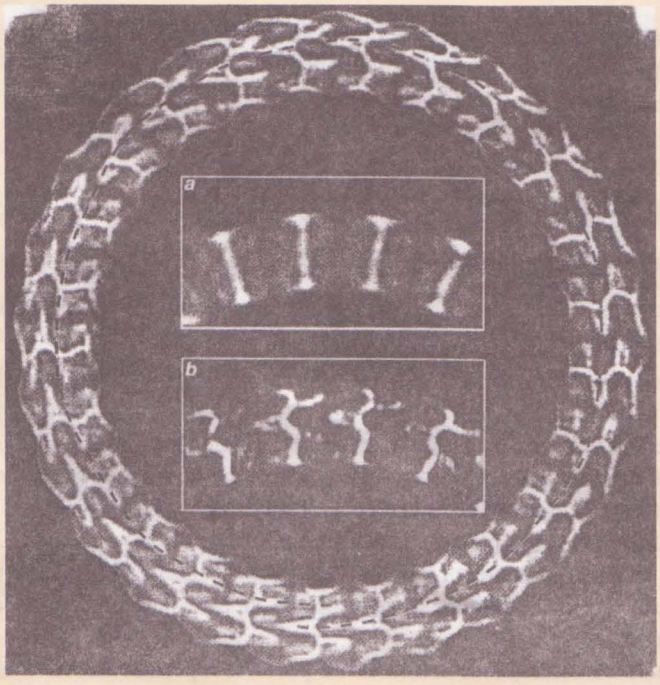
Înaintea abordării haosului determinist ar trebui remarcat faptul că însăşi noţiunea de „haos" poate avea înţelesuri diferite. Haosul determinist este complet diferit de noţiunea de haos introdusă la sfârşitul secolului al XIX-lea de către Ludwig Boltzmann. Acesta a urmărit în lucrările sale explicarea legilor termodinamicii legând mărimi macroscopice ca presiunea şi temperatura unui gaz de caracteristicile mişcărilor moleculelor, la nivel microscopic. Teoria lui Boltzmann are la bază noţiunea de haos molecular perfect. El leagă **entropia**, mărime fizică introdusă de Rudolf Clausius, de mulţimea stărilor microscopice posibile ale sistemului compatibile cu o stare macroscopică dată.

Fig. 4.1



„Celula inelară" – folosită pentru a observa fenomenul de convecţie în argon

Fig. 4.2



Celule sub forma unui „fagure de albine" obţinute la încălzirea prin convecţie a unui lichid.
a) structură ordonată
b) structură haotică

Formula logaritmică, $S = k \ln w$ îi poartă numele (S = entropia, k = constanta lui Boltzmann, w = numărul stărilor microscopice compatibile cu o stare macroscopică dată).

În această stare numită de echilibru termodinamic, sistemul este haotic la nivel microscopic. Maximizarea entropiei în această stare atrage după sine minimizarea cunoştinţelor pe care le avem despre evoluţia la nivel microscopic a sistemului.

Totuşi, în afara stării de echilibru termodinamic, dezordinea maximă este departe de a fi o regulă; structurile ordonate pot să apară în toate sistemele deschise care schimbă materie şi energie cu mediul înconjurător şi sunt departe de o stare de echilibru termodinamic.

În fizică se pot găsi exemple simple de formaţiuni spontane cu structură ordonată. Un asemenea exemplu apare la încălzirea unui lichid prin convecţia termică (fig. 4.1). Experimentul a fost făcut de către H. Bernard, care a observat formarea unor celule ce se organizează sub forma unui „fagure de albine" (fig. 4.2.). Celule astfel formate sunt datorate mişcărilor de convecţie din lichid: în centrul fiecărei celule curenţii de lichid urcă, lichidul ajuns la suprafaţă se răceşte şi cade apoi în lungul pereţilor de separare dintre celule. La începutul încălzirii lichidul formează „rulouri" care se rotesc în jurul

unor linii orizontale prezentând o structură regulată pentru ca apoi, dacă încălzirea continuă, mişcările lor să devină tot mai complexe şi în final neregulate, „haotice". Ideea ce se desprinde de aici este următoarea: în sistemele deschise, stările ordonate se pot forma, fiind generate de o adevărată autoorganizare.

Fluidul încălzit la bază urcă, apoi se răceşte şi coboară. Liniile de curent circulare se organizează în rulouri reprezentate aici fără instabilităţi oscilatorii. Când continuăm încălzirea plăcii inferioare, rulourile devin instabile şi se ondulează.

Faţă de haosul microscopic ce se caracterizează printr-un număr mare de parametri, haosul determinist este generat de efectul unui număr mic de parametri. De fapt, sunt suficiente trei grade de libertate independente pentru ca sistemul să devină haotic în sensul discutat mai sus.

Ce anume are însă, ca principală particularitate, această evoluţie haotică guvernată de un număr mic de grade de libertate?

Caracteristica principală este aceea că, în mod paradoxal, ecuaţiile ce guvernează mişcarea haotică macroscopică sunt complet deterministe. Sisteme pornind din condiţii iniţiale apropiate pot evolua într-o manieră complet diferită, în funcţie de condiţiile iniţiale. Ideea de bază care susţine întreg edificiul haosului determinist este **sensibilitatea la condiţiile iniţiale**. Oamenii de ştiinţă au fost astfel forţaţi să investigheze haosul căutându-i proprietăţile generale.

4.3* Descrierea comportamentului haotic Spaţiul fazelor. Atractori clasici şi stranii

4.3.1 Spaţiul fazelor

Una dintre cele mai cunoscute modalităţi de a studia comportarea unui sistem fizic constă în scrierea şi rezolvarea unei ecuaţii diferenţiale. Aceasta este o relaţie care leagă viteza de variaţie a variabilelor ce descriu starea unui sistem fizic de valorile curente ale aceloraşi variabile. Vom analiza în continuare, în acest context, căderea liberă a unui corp în câmpul gravitaţional terestru, presupus uniform, în absenţa forţelor de rezistenţă la înaintarea în aer.

Starea corpului pe tot parcursul este descrisă, la orice moment de timp, de două variabile: coordonata $y(t)$ şi viteza $v(t)$. Originea referenţialului se alege la suprafaţa Pământului iar variabilele $y(t)$ şi $v(t)$ pot fi determinate prin rezolvarea unei ecuaţii diferenţiale.

Aplicând principiul fundamental al dinamicii (în forma scalară, ţinând cont că mişcarea este unidimensională) şi considerând că masa corpului este constantă, avem:

$$F = ma \Leftrightarrow \frac{dp}{dt} = -mg \Leftrightarrow \frac{d(mv)}{dt} = -mg \tag{1}$$

$$\frac{dy}{dt} = v \tag{2}$$

Ecuaţiile (1) şi (2) determină în mod unic funcţiile y şi v dacă sunt cunoscute valorile celor două variabile la momentul iniţial

$$t_0 : y(t_0) = y_0$$

şi

$$v(t_0) = v_0$$

Pentru a descrie căderea liberă putem introduce un spaţiu al stărilor numit **spaţiul fazelor**. Spaţiul fazelor este numai în aparenţă un spaţiu fizic, el nu este un spaţiu de tipul celui tridimensional în care noi trăim. El este util în fizică deoarece permite interpretarea geometrică a ecuaţiilor diferenţiale ce descriu evoluţia unui anumit sistem fizic. În cazul căderii libere, coordonata corpului şi viteza sa caracterizează starea momentană, ambele fiind funcţii de timp. Cu ajutorul spaţiului fazelor mărimile: coordonată, viteză, timp pot fi separate.

În spaţiul fazelor „traiectoria" punctului material este obţinută prin reprezentarea grafică $v = v(y)$, ecuaţie care se scrie:

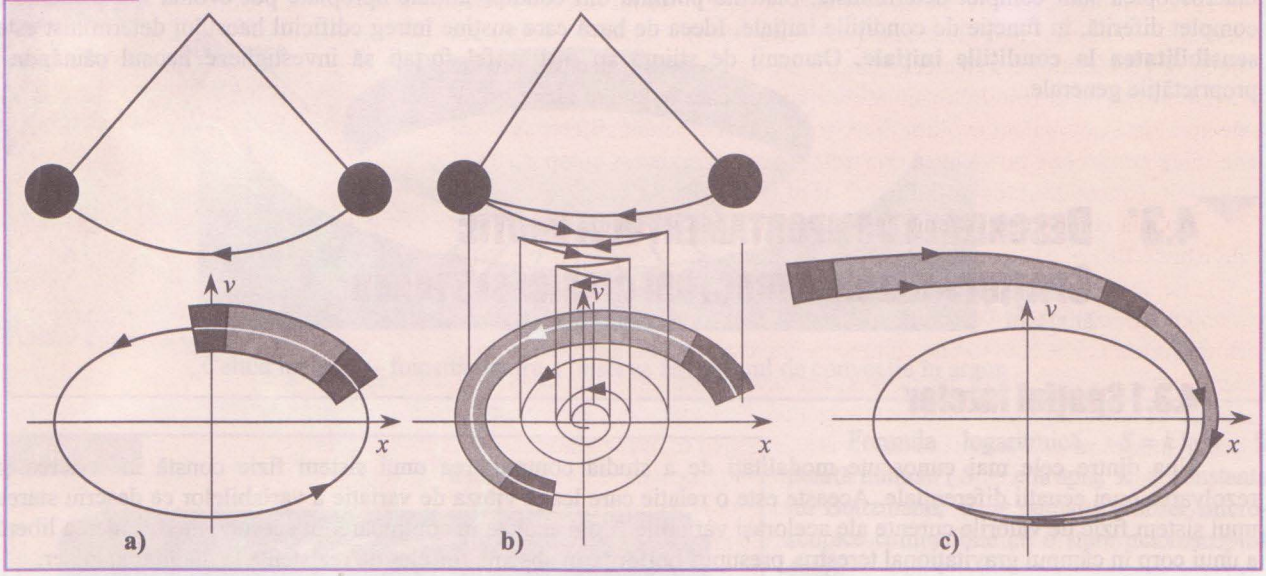
$$v(y) = \left[v_0^2 + 2g(y_0 - y)\right]^{1/2} \tag{3}$$

Graficul funcţiei (3) se poate reprezenta în planul vOy sub forma unei parabole. Această curbă obţinută în spaţiul fazelor nu trebuie confundată cu traiectoria reală a punctului material din spaţiul fizic.

4.3.2 Atractori clasici şi stranii

Pentru un pendul care excută mici oscilaţii putem descrie starea sa printr-un punct în spaţiul fazelor, care, în acest caz, are două dimensiuni: poziţia la un moment dat şi viteza pendulului în acel moment. Dacă mişcarea pendulului nu este armonică, punctul reprezentativ evoluează pe o elipsă în spaţiul fazelor (fig. 4.3a). Dacă pendulul este lăsat să evolueze pornind dintr-o poziţie iniţială diferită, punctul reprezerntativ evoluează pe o elipsă diferită. În cazul pendulului amortizat, din cauza frecărilor, în final pendulul se va opri iar traiectoria sa din spaţiul fazelor tinde spre un punct fix corespunzător poziţiei de echilibru (fig. 4.3b). Acest punct fix către care tinde traiectoria, spre care ea este „atrasă", se numeşte **atractor**. În cazul mişcării oscilatorii întreţinute traiectoria din spaţiul fazelor pe care se înscrie în final punctul reprezentativ se numeşte **ciclu limită** şi acesta constituie atractorul (fig. 4.3c).

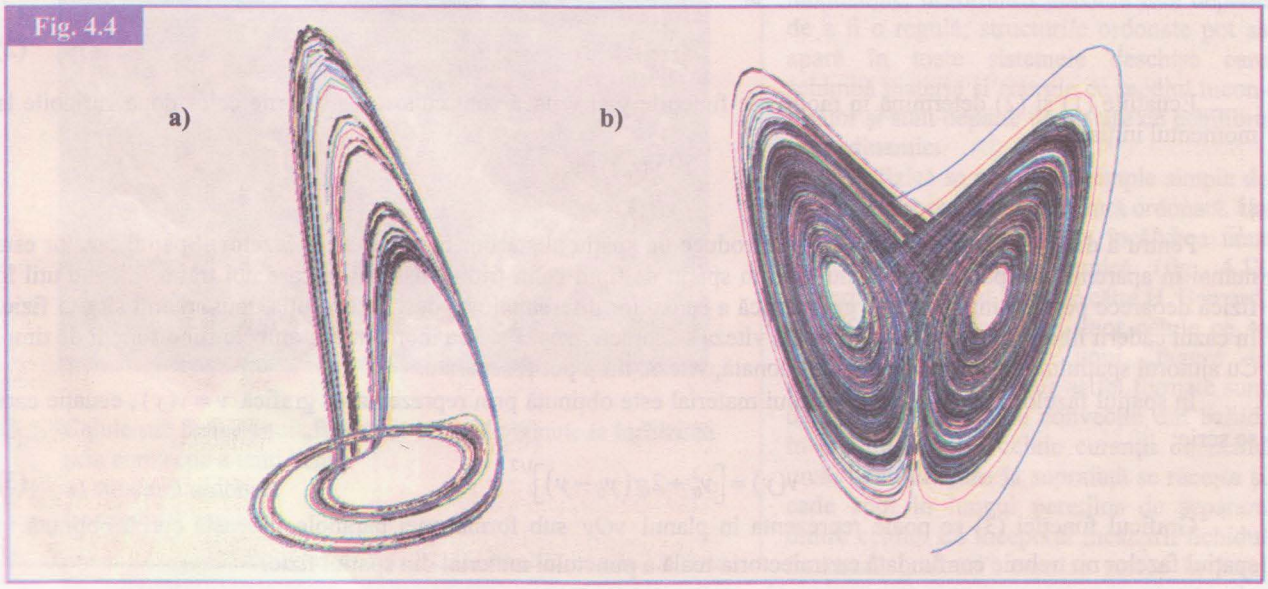
Fig. 4.3



Punctele fixe şi ciclurile limită sunt caracteristice sistemelor amortizate dacă spaţiul fazelor este bidimensional şi nu se produc comportamente haotice.

Genererarea comportamentului haotic necesită existenţa a cel puţin trei grade de libertate. Dacă se imprimă punctului de suspensie al pendulului o mişcare oscilatorie, prin intermediul unui resort, atunci apare o a treia dimensiune a spaţiului fazelor: elongaţia resortului. Trasarea traiectoriei în spaţiul fazelor duce la un nou tip de atractor care nu mai este o curbă închisă ca în cazul precedent; este un **atractor straniu**. În fig. 4.4. a) şi b) sunt

Fig. 4.4



reprezentați atractorii Rossler și respectiv Lorentz, care corespund la două evoluții ale unor sisteme guvernate de trei ecuații diferențiale simple.

Traiectoriile urmate de-a lungul unui atractor straniu nu se încrucișează niciodată, acest fapt este interzis de determinism, ele constituie contururi care sunt din ce în ce mai strânse când sunt privite la scară din ce în ce mai mică. Atractorii stranii sunt **obiecte fractale**.

Până la descoperirea atractorilor stranii, existența unui atractor a fost considerată o garanție a stabilității și reproductibilității, altfel spus proprietatea unui sistem de a ajunge „tot acolo", indiferent de perturbații, oricare ar fi caracteristicile inițiale.

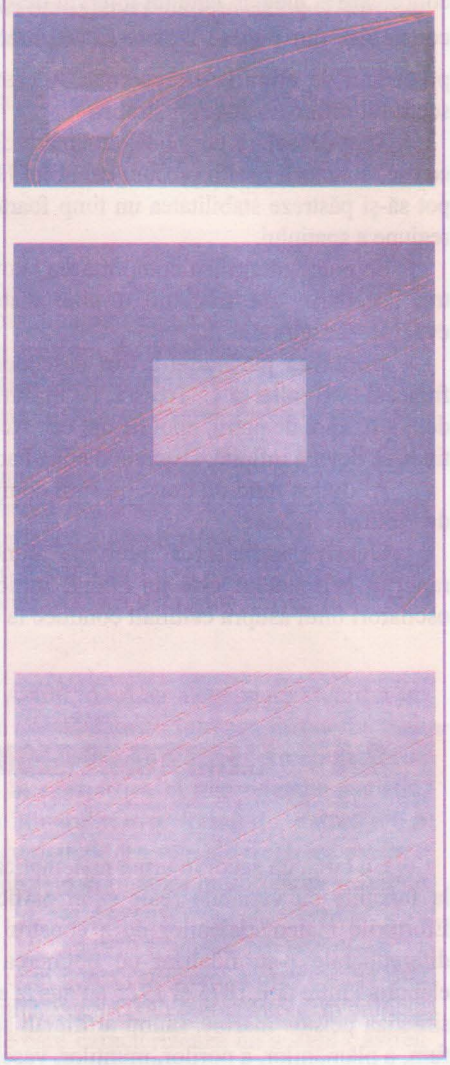
Noilor tipuri de atractori le corespund însă comportamente **sensibile la condițiile inițiale**, care fac ca noțiunea de identic să nu mai aibă sens. Astfel, se vede că prin regiunea ocupată de un atractor straniu (fractal) pot trece oricât de multe traiectorii, iar fiecare din aceste traiectorii are un destin diferit de al celorlalte; situații inițiale pe care le putem alege oricât de apropiate pot genera evoluții divergente. O cât de mică diferență, o cât de mică perturbație poate avea consecințe deosebite; acest comportament a primit numele de „efectul fluturelui" (butterfly effect).

O altă comportare „stranie" a fost remarcată la începutul anului 1960 de către Michael Henon, care lucra ca astronom la observatorul din Nisa (Franța). Acesta, folosind un model de studiu relativ simplu, a observat o comportare mai puțin obișnuită a stelelor care orbitează într-o galaxie. Astfel, unele orbite erau stabile, în timp ce altele păreau a fi aleatoare. Inițial, acest comportament a fost pus pe seama unor erori de calcul pentru ca apoi Henon să realizeze faptul că acest comportament haotic (în sensul haosului determinist) este o caracteristică esențială a dinamicii orbitelor stelare.

Forma orbitelor lui Henon (fig. 4.5) nu sunt elipse newtoniene clasice (deși par la prima vedere). Micul dreptunghi din partea de sus a figurii este mărit în partea din mijloc a figurii pentru a se vedea mai multe detalii și apoi un nou dreptunghi relevă în partea de jos a figurii detalii mai fine. Se remarcă apariția unui fel de drum cu trei căi vecine care când cresc dau naștere la mai multe căi paralele, cea extremă scindându-se într-un nou drum cu trei căi ș.a.m.d.

Modelele elaborate de Henon pentru a explica orbitele planetare iau în considerare faptul că într-un univers real, atracțiile gravitaționale ale altor planete și stele fac ca orbita unei planete oarecare să fie cu mult mai puțin previzibilă sugerând în același timp faptul că aceste orbite ar putea fi neperiodice și extrem de sensibile chiar și la cele mai mici influențe gravitaționale.

Fig. 4.5

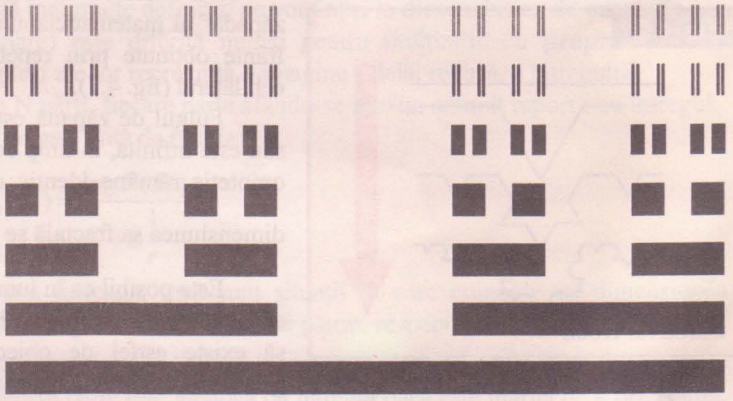


Din punct de vedere matematic atractorul lui Henon este generat de seria de puncte (x_n, y_n) definite prin relațiile de recurență: $x_{n+1} = y_n - ax_n^2$ și $y_{n+1} = b - x_n$. Fig. 4.4. reprezintă acest atractor pentru parametrii $a = \frac{7}{5}$ și $b = \frac{3}{10}$, valorile inițiale fiind $x_0 = 0$ și $y_0 = 0$.

S-a observat că orice secțiune perpendiculară pe această cale multiplu ramificată dă naștere ansamblului lui Cantor (fig. 4.5). Acest ansamblu se obține printr-o metodă simplă de recurență, și anume: se pornește de la un interval închis, să zicem $[0,1]$ și se reține un interval deschis oarecare. De

Fig. 4.6

Ansamblul Cantor



obicei se extrage treimea centrală $\left(\frac{1}{3},\frac{2}{3}\right)$, deşi nu este obligatoriu. Rămân două intervale închise. Procedăm la fel în continuare şi alegem câte un interval deschis în fiecare dintre ele. Repetând procesul la infinit se va obţine o structură constituită din puncte izolate pe segmentul $[0,1]$. Există o infinitate nenumărabilă a cărei densitate depinde de procedeul de eliminare recurentă. Aceasta este natura ansamblului Cantor, iar acest tip de distribuţie se asociază secţiunii printr-un atractor straniu.

Spre deosebire de modelele liniare clasice Newton – Kepler care sunt capabile să prezică traiectoria oricărui corp ceresc, atractorii stranii precum cel al lui Henon oferă un amestec bizar de comportări sigure şi nesigure. Astfel, orbitele pot să-şi păstreze stabilitatea un timp foarte îndelungat şi apoi, brusc, să-şi schimbe cursul sau să „evolueze" într-o altă regiune a spaţiului.

Se poate identifica comportarea haotică a unui sistem după maniera sa de manifestare. Se poate spune că există trei „scenarii" de tranziţie a unui sistem spre comportamentul haotic: **dublarea perioadei, intermitenţa** şi **cvasiperiodicitatea**.

Dublarea perioadei a fost descoperită concomitent de americanul M. Feigenbaumm precum şi de cercetătorii francezi P. Coullet şi C. Tresser. Pe măsură ce constrângerile se măresc, perioada unui oscilator întreţinut se măreşte de două ori, apoi de patru, apoi de opt ori. Aceste dublări de perioadă sunt din ce în ce mai apropiate; atunci când perioada tinde să devină infinită, sistemul devine haotic. Turbulenţa într-un fluid poate să apară după un asemenea scenariu.

Al doilea mod de tranziţie spre comportamentul haotic este **intermitenţa**: o mişcare periodică stabilă întreruptă de răbufniri haotice.

Cvasiperiodicitatea intervine atunci când un al doilea oscilator perturbă un sistem iniţial periodic. Dacă raportul perioadelor este un număr irraţional, atunci spunem că sistemul este cvasiperiodic iar influenţa celor doi oscilatori unul asupra celuilalt conduce la o dereglare a mişcării lor.

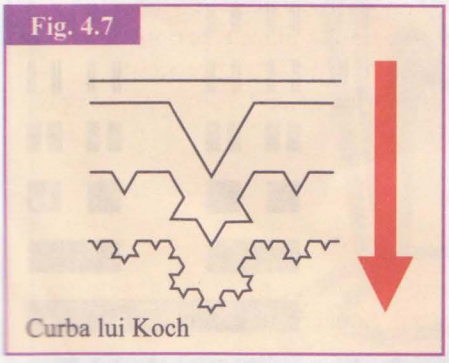
4.4* ELEMENTE DE GEOMETRIE FRACTALĂ

Cu circa un secol în urmă matematica a trecut printr-o perioadă de criză. Problemele apărute se refereau în general la funcţiile cu variabile reale şi în particular, se punea întrebarea dacă toate funcţiile continue sunt diferenţiabile. Eforturile matematicienilor de a construi contra exemple, funcţii care să fie continui în orice punct dar să nu fie diferenţiabile s-au finalizat cu obţinerea aşa numitelor „curbele monstrului". Aceste evenimente din matematica elaborată între anii 1875 şi 1925 au dus la apariţia domeniului fractalilor. Acum se utilizează adesea acest model pentru a sintetiza peisaje marine, munţi artificiali sau continente imaginare, pentru a descrie geometria complexă a negrului de fum, a plămânilor, a norilor, munţilor, vaselor sanguine sau rădăcinilor unui arbore.

Benoît Mandelbrot este acela care în lucrarea sa „Fractalii" i-a calificat pe aceştia drept figuri geometrice constituite din singularităţi, toate similare una cu alta; aceste figuri au fost denumite **fractali**. Originea cuvântului este latină: fractus = ruptură.

Cuvântul **fractal** desemnează un obiect a cărui geometrie poate fi descrisă într-un spaţiu a cărui dimensiune nu este număr întreg ci o fracţie.

Fig. 4.7



Curba lui Koch

Un exemplu de o asemenea „curbă a monstrului" este „fulgul de zăpadă" al matematicianului Von Koch, constituit dintr-o infinitate de linii frânte obţinute prin repetiţia aceluiaşi model fragmentat – un triunghi echilateral (fig. 4.7).

Fulgul de zăpadă este un obiect suprinzător: lungimea perimetrului său este infinită, în timp ce masa lui rămâne finită, iar când îl dilatăm prin omotetie rămâne identic oricare ar fi distanţa de la care îl observăm – dimensiunea sa fractală se exprimă prin raportul $\frac{\ln 4}{\ln 3}$.

Este posibil ca în lumea noastră tridimensională, unde suprafeţele sunt considerate drept obiecte bidimensionale şi liniile entităţi unidimensionale să existe astfel de obiecte cu dimensiunea fracţionară? Oare repune geometria fractală în discuţie fundamentele fizicii tradiţionale?

Nu, din contră, ea o completează şi introduce noi termeni.

4.4.1 Caracteristicile unui fractal

Deoarece noţiunea de fractal este destul de dificil de definit din cauza unei mari generalităţi pe care o comportă, fractalul poate fi mai degrabă caracterizat printr-o serie de proprietăţi structurale. Acestea sunt:

– structura fină, care presupune existenţa detaliilor la toate scările;
– neregularitatea, care implică imposibilitatea descrierii structurii utilizând limbajul geometriei euclidiene;
– dimensiunea fractală, mai mare decât dimensiunea topologică;
– reguli genetice recursive.

Toate aceste caracteristici pot fi grupate în trei categorii:

a) Lungimea caracteristică

Orice formă poate să aibă sau nu o aşa numită lungime caracteristică. Astfel, de exemplu, pentru un pătrat lungimea caracteristică este latura sa, pentru o persoană poate fi înălţimea sa. Toate formele care au lungimi caracteristice au şi proprietatea de a putea fi aproximate prin forme mai simple, având aceeaşi lungime caracteristică. Aceste forme sunt caracterizate şi de „netezimea" lor. În cazul obiectelor euclidiene, netezimea acestora, evidentă atunci când observarea se face la o anumită scară se poate transforma în neregularitate, dacă observaţia se face la altă scară.

De exemplu, un fir de aţă întins privit de la oarecare depărtare poate fi asimilat cu o dreaptă. Privit de aproape, se poate distinge structura sa: o multitudine de fibre care alcătuiesc firul.

Dacă se consideră însă şi alte forme, cum ar fi: reţeaua de vase sanguine, arborele pulmonar, imaginea unei descărcări electrice, imaginea unui fulg de zăpadă, acestea nu se mai pot încadra în categoria formelor ce prezintă lungime caracteristică; formele lipsite de lungime caracteristică au drept caracteristică, **complexitatea**.

Pentru orice structură cu lungime caracteristică, complexitatea scade pe măsură ce observăm părţi de diferite mărimi dar pentru structurile fractale (lipsite de o lungime caracteristică) complexitatea detaliilor din ce în ce mai mici nu descreşte.

b) Autosimilaritatea (autoasemănarea)

Această proprietate reprezintă conceptul central al geometriei fractale. Astfel, dacă se alege şi se studiază un detaliu oarecare al unei forme fractale, se va putea observa că acest detaliu este asemănător cu întreaga formă fractală; oricât de mult s-ar micşora mărimea părţii observate, aceasta rămâne similară cu întregul. Pentru formele naturale (reţeaua vaselor sanguine), conturul unei celule etc. autoasemănarea nu este în sens strict, ci mai degrabă statistic, detalii de diferite mărimi ale acestor structuri nu sunt strict asemănătoare cu întregul. Orice formă din natură are o limită superioară şi una inferioară pentru scara la care se fac observaţiile, caracteristicile fractale ale formelor studiate putând fi observate numai între aceste limite. Datorită acestor limite, pentru formele din natură modificarea scalei de observaţie nu se poate face cu mai mult de 3-4 ordine de mărime.

c) Dimensiunea fractală

Cunoaşteţi de la geometrie că spunem, în mod empiric, că dimensiunea unui punct este zero, a unei drepte este 1, a unui plan este 2, iar spaţiul în care noi trăim are dimensiunea 3. Dimensiunile empirice au valori întregi şi coincid cu numărul gradelor de libertate (definit ca numărul de variabile independente care caracterizează un sistem); astfel, localizarea unui punct pe o dreaptă este determinată de un număr real, pentru a defini un plan este necesar un set de două numere reale etc.

Însă, definirea dimensiunii prin numărul gradelor de libertate, conţine numeroase impedimente, atunci când este vorba de structuri fractale. În concluzie, noţiunea de dimensiune trebuie extinsă.

În teoria fractalilor există două definiţii ale dimensiunii diferite între ele, şi anume: dimensiunea topologică şi, respectiv, dimensiunea fractală.

Deoarece şi pentru dimensiunea fractală există mai multe definiţii, ne vom opri la **dimensiunea de omotetie**.

Dimensiunea de omotetie (de autoasemănare) este diferită numai pentru mulţimile cu **proprietatea de autosimilaritate**, adică acele mulţimi pentru care părţi ale lor reprezintă o imagine fidelă, redusă, a întregului.

Fie M o mulţime care poate fi descompusă în N părţi, fiecare parte afându-se într-un anumit raport r cu întregul. Dimensiunea de similitudine (omotetie) a lui M este dată de relaţia:

$$\dim_s(M) = \frac{\log N(M)}{\log \frac{1}{r}} \qquad (1)$$

Dimensiunea de similitudine nu este neapărat întreagă, însă sunt situaţii în care coincide cu dimensiunea topologică. Acest fapt se poate verifica uşor pentru un segment de dreaptă, un pătrat, respectiv un cub.

Un segment de dreaptă se poate împărţi, de exemplu, în $4 = 4^1$ părţi (segmente) identice, astfel încât fiecare parte are lungimea $1/4$ din lungimea totală. Totodată, fiecare parte este identică cu întregul dacă este mărită de 4 ori. Astfel,

segmentul de dreaptă este autosimilar, el putând fi descompus în N părți identice, fiecare din părți aflându-se în raport $1/N$ cu întregul. În acest caz, conform relației (1), dimensiunea de autoasemănare este 1, egală cu cea topologică.

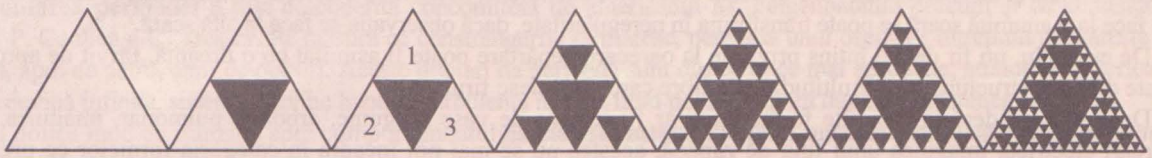
Putem repeta raționamentul în cazul unui pătrat. Astfel, un pătrat poate fi împărțit în $16 = 4^2$ pătrate identice, având fiecare latura egală cu $1/4$ din latura pătratului inițial. Fiecare parte este identică cu întregul dacă este mărită de 4 ori. Acesta este de asemenea autosimilar, el putând fi descompus în N^2 părți identice, latura fiecărei părți fiind în raportul $1/N$ cu latura pătratului inițial. Dimensiunea de similitudine a pătratului este 2, egală cu dimensiunea sa topologică.

În mod analog, în cazul unui cub se obține dimensiunea de similitudine egală cu 3.

Să considerăm acum fractalul numit „triunghiul lui Sierpinski" (fig. 4.8.)

Fig. 4.8

Triunghiul lui Sierpinski



Acest fractal se poate genera pornind de la un triunghi echilateral. Unim mijloacele celor trei laturi prin segmente de dreaptă și eliminăm triunghiul central. Vom obține trei miniaturi identice în formă de triunghi echilateral, cu latura de două ori mai mică decât latura triunghiului inițial. Procedeul se repetă, cu fiecare dintre miniaturi.

Să determinăm dimensinea de similitudine a triunghiului lui Sierpinski: cea de-a doua figură este compusă din $N = 3$ miniaturi, identice cu originalul, iar prin multiplicare cu 2 a laturii fiecărei miniaturi, obținem o figură identică cu cea inițială, ceea ce înseamnă că factorul de scalare este $S = 2$ (sau $r = \frac{1}{2}$).

Deci conform relației (1) avem dimensiunea:

$$D = \frac{\log 3}{\log 2} = 1{,}585\,.$$

Trebuie să rețineți că o formă care are o dimensiune de similitudine mai mare are un mai mare grad de complexitate decât o formă cu o dimensiune de asemănare mai mică.

Dimensiunea de similitudine este deci un indice al complexității.

4.4.2. Tipuri de fractali

Numărul foarte mare al structurilor fractale face ca o clasificare a acestora să fie dificilă. Ei se pot clasifica fie după aspectul exterior, fie după regulile lor de construcție.

Din punct de vedere al generării lor, fractalii pot fi:

– liniari (matematici, determiniști): aceștia se generează cu ajutorul transformărilor liniare aplicate unor funcții, segmente, suprafețe sau corpuri;

– neliniari: aceștia se obțin cu ajutorul transformărilor geometrice neliniare.

Fractalii pot fi naturali sau artificiali (seturi fractale). De exemplu, mișcarea browniană este un fractal natural în timp ce curba mișcării browniene este un fractal artificial reprezentând modelarea informatică a fractalului natural. Oricărui fractal natural îi putem asocia unul sau mai multe seturi fractale.

Vom exemplifica în continuare câteva tipuri de fractali și vom vedea care sunt fenomenele fizice care pot fi studiate cu ajutorul lor.

a) Ansamblul Cantor

Modul în care acest fractal se construiește a fost discutat anterior. Prezentarea lui apare în fig. 4.6. Geometria sa nu poate fi descrisă în termeni clasici, în sensul că nu reprezintă locul geometric al unor puncte ce satisfac o anumită condiție geometrică, nici mulțimea soluțiilor, nici ecuații algebrice. Ansamblul lui Cantor are o structură fină, ea este alcătuită dintr-o infinitate de puncte situate la distanță finită și totuși, complet discontinuă.

Dimensiunea topologică a acestei mulțimi este nulă iar dimensiunea de similitudine este

$$D = \frac{\log 2}{\log 3} = 0,6309...$$

Valorile celor două dimensiuni arată că mulțimea este un hibrid situat între linie și punct.

Cu toate că poate să pară ciudat, în natură există astfel de construcții de tip cantorian. În afara exemplului discutat în paragraful 4.3. amintim că și inelele planetei Saturn respectă o asemenea așezare. Inițial s-a crezut că planeta Saturn are un singur inel. Ulterior s-a observat că există o structură care la mijloc se fragmentează și este formată din două inele mai subțiri. Când sonda Voyager s-a apropiat de Saturn s-a observat că și aceste două inele se fragmentează la mijloc în alte două mai subțiri ș.a.m.d. (fig. 4.9).

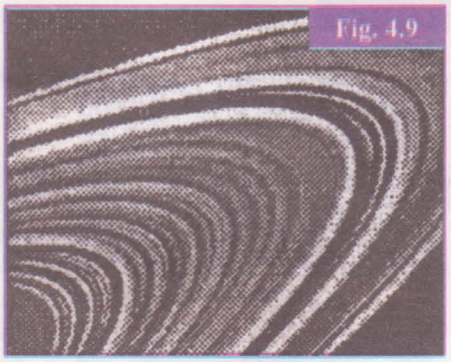


Fig. 4.9

În această fragmentare a inelelor lui Saturn regăsim ansamblul lui Cantor.

Inelele lui Saturn nu reprezintă singurele construcții naturale cantoriene întâlnite în Univers. Se pot aminti în acest sens super-clusterii giganți care la rândul lor sunt alcătuiți din clusteri, care la rândul lor sunt alcătuiți din aglomerări de galaxii, care sunt alcătuite din sisteme solare, care sunt la rândul lor alcătuite din planete ș.a.m.d. Orice detaliu din Univers prezintă o anumită structură de tip cluster, ceea ce face ca ansamblul lui Cantor să-și găsească aplicație în modelarea Universului.

b) Curba lui Koch

Modul în care se obține acest set fractal a fost deja discutat într-un paragraf anterior, reprezentarea ei fiind redată în fig. 4.7. Această curbă posedă proprietatea de autosimilaritate, fiecare din părțile sale sunt imagini la scară redusă ale întregului. Dimensiunea topologică a curbei este 1, fiind o curbă continuă, iar dimensiunea fractală este

$$D = \frac{\log 4}{\log 3} = 1,2618$$

Pornind de la curba lui Koch se pot genera promontorii sau insule artificiale cu ajutorul cărora se pot modela forme reale existente în natură.

c) Automate celulare

În general, un automat celular este un univers artificial, guvernat de legi naturale simple. Aceste universuri sunt „celulare" pentru că ele sunt de obicei alcătuite din multe celule identice, care se multiplică și se divid într-un mod similar cu celulele reale. Se poate alege structura universului și legile pe care le respectă după care acesta este lăsat să evolueze de unul singur, respectând legile stabilite. Ideea automatelor celulare aparține biologului german A. Lindenmayer.

Un exemplu de automat celular este cel inventat de către matematicianul britanic John Conway, numit „Jocul vieții". În cazul acestui automat celular punctele dintr-o rețea trăiesc sau mor în funcție de statutul punctelor învecinate. Regula de generare este următoarea: dacă o celulă moartă are trei celule vecine vii, din cele opt care o înconjoară, atunci ea revine la viață iar dacă o celulă vie are două sau trei celule vecine vii, ea supraviețuiește (altfel moare). Unele dintre celule sunt stabile, altele trec prin două sau trei configurații iar altele dispar rapid; este imposibil să se evalueze în cât timp se va stabiliza un scenariu anume, deoarece apariția unei celule în cadrul unui anumit grup, poate duce la supraviețuirea sau la dispariția grupului. Stabilitatea acestui univers este foarte sensibilă la condițiile inițiale. Acest tip de comportare apare deseori în universul real.

EXPERIMENT

Se realizează circuitul electric din schema de mai jos. (fig. 4.10)

Circuitul este format dintr-un rezistor, o bobină și o diodă. Dioda poate fi de tip: 1*N* 4001, 1*N* 4004, 1*N* 4005 sau 1*N* 4007. Generatorul de semnal se va regla pentru a da o undă sinusiodală de frecvență 2 MHz și o amplitudine 0,1V. Semnalul de ieșire are o amplitudine inferioară celei de intrare, dar păstrează aceeași frecvență. Crescând lent amplitudinea semnalului de intrare pentru anumite valori între 1V și 2V circuitul dă brusc un semnal de ieșire cu două componente de frecvențe diferite.

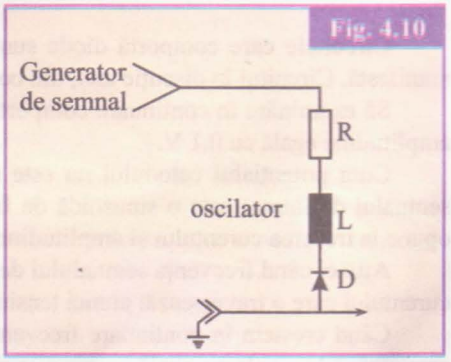


Fig. 4.10

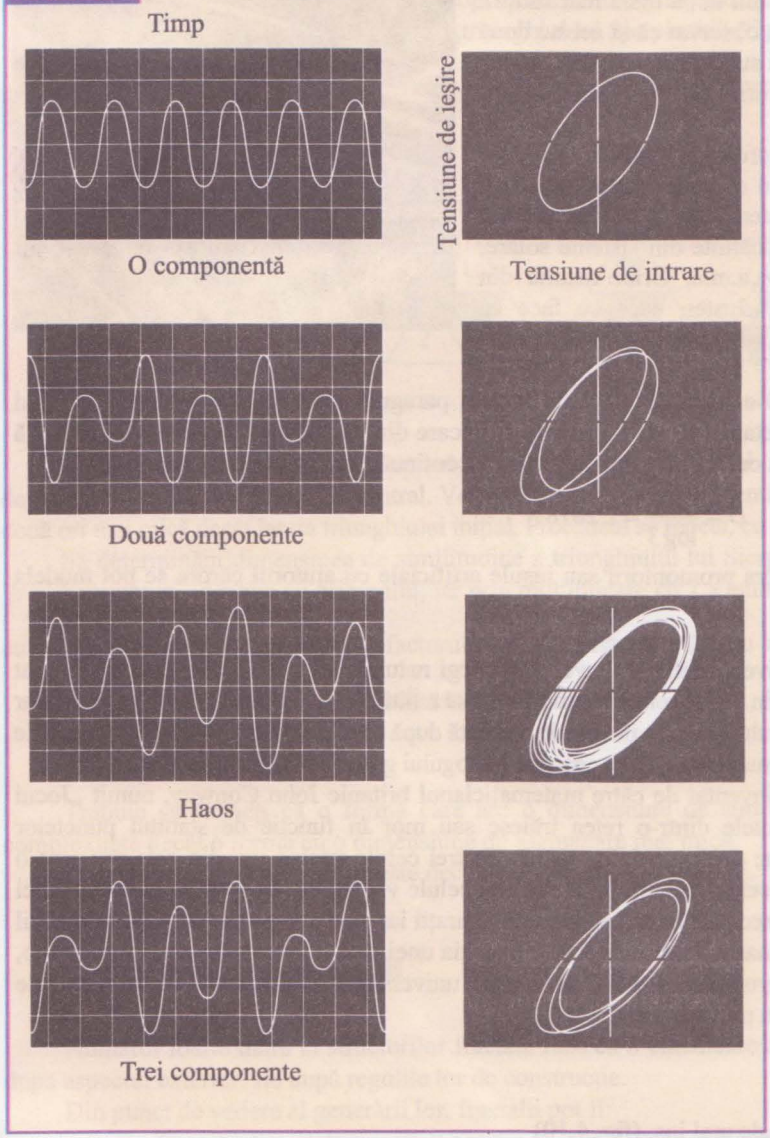
Punctul în care cele două componente apar este o **bifurcație**. Când continuă creșterea amplitudinii semnalului de intrare cu valori mici apar noi bifurcații și se va remarca faptul că distanța dintre ele se diminuează printr-o serie geometrică. Raportul termenilor acestei serii este o constantă. Pornind de la o anumită amplitudine sistemul devine bifurcat

de un număr infinit de ori, sfârşind prin a deveni haotic. Semnalul nu este aleator; este un amestec complex de componente de diferite frecvenţe.

Crescând amplitudinea dincolo de valoarea apariţiei haosului se va obţine un semnal regulat la ieşire, compus din trei sau cinci componente. Acesta este un comportament specific sistemelor haotice.

Acest comportament se observă în figura 4.11.

Fig. 4.11



Dacă circuitul nu intră în regim haotic se reglează generatorul de semnal pe o altă frecvenţă apoi se încearcă din nou, eventual înlocuind dioda. Cele mai indicate diode sunt cele cu capacitatea mare. Cu generatorul de semnal sau cu osciloscopul ales pot apare unele dificultăţi când se lucrează cu frecvenţe de ordinul megahertzilor. Această problemă se poate rezolva folosind frecvenţe mai mici pe un circuit cu alte valori ale componentelor. Cu o diodă $1N\ 2858$, o rezistenţă de $25\ \Omega$ şi o bobină cu inductanţa $L = 0{,}1\ \text{H}$ se observă haosul în jurul frecvenţei de 75000 Hz.

Dioda este cea care este la originea comportamentului haotic al circuitului. O diodă ideală nu lasă să treacă un curent electric decât dacă potenţialul catodului este inferior celui al anodului. În circuit anodul este legat la pământ (potenţial nul).

Ori de câte ori catodul este la un potenţial negativ faţă de pământ dioda lasă curentul să treacă. Dioda reală nu are un comportament ideal: când potenţialul catodului este pozitiv dioda se comportă ca un condensator, intensitatea curentului fiind proporţională cu variaţia, în funcţie de timp, a diferenţei de potenţial dintre borne. Acest comportament de tip condensator persistă atâta timp cât potenţialul catodului este superior valorii de aproximativ -0,5 V, apoi dioda lasă să treacă curentul opunându-i o rezistenţă şi menţinând o diferenţă de potenţial între borne de aproximativ -0,5 V. Când potenţialul catodului redevine superior celui al anodului, curentul se anulează dar nu imediat: pentru un moment dioda lasă să treacă curentul, apoi se comportă din nou ca un condensator.

Circuitele care comportă diode sunt în mod obişnuit folosite în regimul în care proprietăţile neideale nu se manifestă. Circuitul în discuţie aici, din contră este fundamentat chiar pe aceste proprietăţi.

Să examinăm în continuare comportamentul circuitului când semnalul de intrare a circuitului este sinusoidal cu amplitudine egală cu 0,1 V.

Cum potenţialul catodului nu este niciodată inferior la -0,5 V, dioda se comportă ca un condensator. Când semnalul de intrare este o sinusoidă de frecvenţă scăzută dioda şi bobina se comportă ca o rezistenţă mare care se opune la trecerea curentului şi amplitudinea semnalului de ieşire este atunci egală cu cea a semnalului de intrare.

Atunci când frecvenţa semnalului de intrare atinge valoarea critică, inductanţa şi dioda oferă o rezistenţă scăzută curentului care o traversează: atunci tensiunea de ieşire este cvasinulă.

Când creştem în continuare frecvenţa pornind de la această valoare critică, amplitudinea semnalului de ieşire creşte până la o valoare egală cu cea a semnalului de intrare.

Frecvența critică depinde de capacitatea diodei și inductanța circuitului. Ea este dată de relația $1/(2\pi LC)$.

Dacă inductanța este de 100 μH și $C = 50$ nF atunci $\nu = 0,23$ Mhz. Dacă creștem acum amplitudinea semnalului de intrare la 2V dioda are două componente posibile în funcție de valoarea instantanee a diferenței de potențial la borne. Fie ea lasă să treacă curentul, fie ea se comportă ca un condensator. Putem spune că inductanța este comandată prin semnalul de intrare și prin diodă. Când acestea două sunt sincrone circuitul continuă să dea un semnal periodic, iar atunci când sunt în opoziție circuitul generează haos.

Pe măsură ce amplitudinea semnalului de intrare crește circuitul produce un semnal de ieșire ce conține două frecvențe, apoi patru, apoi opt.

Dacă circuitul se conectează la un difuzor atunci se va auzi un zgomot surd când circuitul este haotic, generându-se un larg evantai de frecvențe, unele în domeniul de audibilitate.

Întrebări și exerciții propuse

1. Ce se înțelege prin „haos determinist"?

2. Numiți fenomene și obiecte din natură care pot fi descrise cu ajutorul teoriei fractalilor.

3. Realizați montajul din figura 4.12. Pendulului confecționat dintr-un material feromagnetic i se imprimă un impuls deviindu-l de la poziția de echilibru. Urmăriți mișcarea pendulului pentru diferite condiții inițiale.

Ce puteți spune despre comportarea pendulului? Atractorul va fi unul clasic sau straniu?

4. Ce este un fractal? Dați exemple.

5. Definiți spațiul fazelor. Care este utilitatea lui în studiul fenomenelor fizice?

6. Realizați montajul din fig. 4.13.

Modificați, cu ajutorul unei cleme cu șurub debitul de curgere al picăturilor în vasul colector și cronometrați intervalul de timp între două picături succesive. Sunt aceste intervale egale? Ce puteți spune despre comportamentul acestui sistem?

Fig. 4.12

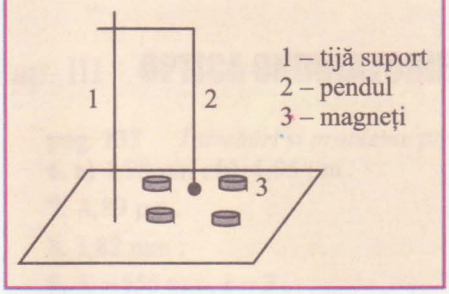
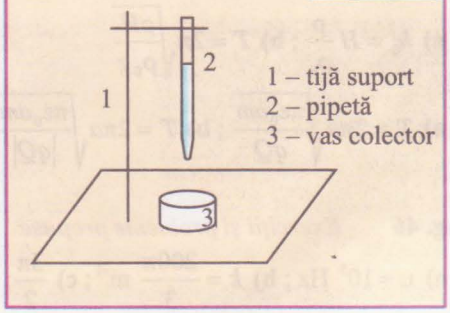


Fig. 4.13



RĂSPUNSURI

Cap. I OSCILAȚII ȘI UNDE MECANICE

pag. 22 *Exerciții și probleme propuse*

1. a) $T = 0{,}628$ s; **b)** $E_{p_0} = 9\cdot10^{-3}$ J; $E_{c_{max}} = 9\cdot10^{-3}$ J; $\mathcal{A} = \frac{v_{max}}{\omega} = 3\cdot10^{-2}$ m;

d) $t_k = (2k+1)\frac{\pi}{40}$ s, $k \in \mathbb{N}^*$.

3. a) $k_1 = 2k, \omega_1/\omega_2 = \sqrt{2}$; **b)** $\omega_2 = 2\omega_0$.

5. a) $l_1 = 0{,}62$ m, $l_2 = 0{,}38$ m; **b)** $\omega = 10$ s^{-1}, $T = 0{,}628$ s; **c)** $y(t) = 0{,}09\cdot\sin 10t$ (m).

6. $y(t) = \mathcal{A}\sin(\omega t+\varphi)$, unde $\mathcal{A} = \frac{1}{\omega}\sqrt{\omega^2 y_0^2 + v_0^2} = m\sqrt{\frac{g^2}{k^2} + \frac{2gh}{k(m+M)}}$, $\omega = \sqrt{\frac{k}{m+M}}$ și $\operatorname{tg}\varphi = \sqrt{\frac{g(m+M)}{2kh}}$.

8. $T = \frac{2\pi}{\cos\alpha}\sqrt{\frac{l}{g}}$.

9. a) $T(t) = mg - mx_m\omega^2\sin\omega t$; $T(t) = 1 - \sin 5\sqrt{2}t$ (N); **b)** $x_{m_{min}} = \frac{g}{\omega^2} = 0{,}2$ m.

11. a) $h_0 = H\frac{\rho}{\rho_0}$; **b)** $T = 2\pi\sqrt{\frac{\rho H}{\rho_0 g}}$.

12. a) $T = 2\pi a\sqrt{\frac{\pi\varepsilon_0 am}{qQ}}$; **b)** $T = 2\pi a\sqrt{\frac{\pi\varepsilon_0 am}{|qQ|}}$.

pag. 46 *Exerciții și probleme propuse*

3. a) $\upsilon = 10^5$ Hz; **b)** $k = \frac{200\pi}{3}$ m^{-1}; **c)** $\frac{3\pi}{2}$; π; 0.

4. b) $y = 3\cdot10^{-3}\sin 2\pi\left(25t - \frac{x}{0{,}01}\right)$ (mm).

6. a) 2 puncte ($\lambda = 0{,}755$ m); **b)** $\Delta x = 0{,}363$ m.

pag 51 *Întrebări, exerciții și probleme propuse*

5. a) $y_i(t) = 3\cdot10^{-3}\sin 2\pi\left(50t - \frac{x}{14{,}1}\right)$ (mm); **b)** $y_r(t) = 3\cdot10^{-3}\sin 2\pi\left(50t + \frac{4{,}05+x}{14{,}1}\right)$ (mm);

c) $\Delta\varphi = 2\pi\left(\frac{3-2x}{14{,}1}\right) - \pi$.

pag. 57 *Exerciții și probleme propuse*

3. a) $A = 2{,}5$ cm; **b)** $\Delta r = (2k+1)\cdot0{,}2$ m, $k \in \mathbb{N}^*$; **c)** $\mathcal{A}_{min} = 0{,}5$ cm.

4. a) $L = 5$ m; **b)** $\mathcal{A} = 16{,}64$ mm; $\mathcal{A}(x) = \sqrt{164 + 160\cos\pi\left(1 - \frac{x}{10}\right)}$ mm.

pag. 66 *Exerciții și probleme propuse*

2. a) $\upsilon_1 = 220$ Hz; **b)** $\upsilon_3 = 660$ Hz; **c)** $\upsilon_1 = 220$ Hz; **d)** $\upsilon_2 = 440$ Hz.

3. a) $\upsilon = 392$ Hz ; **b)** $\upsilon_2 = 2\upsilon = 784$ Hz ; $\upsilon_4 = 4\upsilon = 220$ Hz ; $\upsilon_6 = 6\upsilon = 220$ Hz .

4. a) trei; **b)** $\upsilon_1 = 196$ Hz ; **c)** $\upsilon_3 = 588$ Hz ; $\upsilon_5 = 980$ Hz ; $\upsilon_6 = 1176$ Hz ; $\upsilon_7 = 1372$ Hz ; $\upsilon_8 = 1568$ Hz .

5. b) $\upsilon_1 = 110$ Hz ; **c)** $\upsilon = 110$ Hz .

6. a) $\upsilon_{do_3\#} = 262 \cdot 1{,}06 = 278$ Hz; $\upsilon_{mi_3 b} = 311$ Hz ; **b)** $\upsilon_{clarinet} = \upsilon_{do_3} \cdot 1{,}06 = 278$ Hz ($do_3\#$) .

Cap. II OSCILAȚII ŞI UNDE ELECTROMAGNETICE

pag. 76 *Exerciții şi probleme propuse*

2. a) $T = \dfrac{2\pi}{\sqrt{\dfrac{L_1 L_2 C}{L_1 + L_2}}}$; **b)** $U_{CO} = I_\infty \sqrt{\dfrac{L_1 (L_1 + L_2)}{L_2 C}}$.

3. a) $\upsilon = \dfrac{1}{2\pi\sqrt{LC_S}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2\pi\sqrt{LC}}$; **b)** $I_\infty = \dfrac{q_0}{2\sqrt{LC}}$; **c)** $q_1 = \dfrac{q_0}{2}(\cos\omega t + 1)$, $q_2 = \dfrac{q_0}{2}(\cos\omega t - 1)$.

pag. 79 *Exerciții şi probleme propuse*

5. $C_S = \dfrac{C}{3}$, $\omega_s = 770$ s^{-1}, $\omega_p = 2500$ s^{-1}, $\dfrac{\omega_s}{\omega_p} = 3{,}08$.

6. $R = 27{,}6\ \Omega$

pag. 89 *Probleme propuse*

2. $R \approx 314\ \Omega$, $L \approx 1$ H, $C \approx 568\ \mu$F .

Cap. III OPTICA ONDULATORIE

pag. 132 *Întrebări şi probleme propuse*

6. a) 1,98 μm ; **b)** 4,95 μm .

7. 4,89 μm .

8. 1,82 mm ;

9. $\lambda = 555$ mm, $k = 3$.

10. 0,1 μm .

11. 1′32″ .

12. 0,25 μm .

pag. 138 *Întrebări şi probleme propuse*

4. 2500 trăsături/mm.

5. a) $\dfrac{\pi}{6}$ rad ; **b)** $k_{max} = \pm 4$; **c)** $x = 0{,}6$ m .

6. a) $L = 40$ cm ; **b)** $\lambda = 625$ nm .

7. $k = 5$.

8. $\lambda = 648{,}1$ mm .

9. 18.

10. $N = 17$.

pag. 144 *Întrebări şi probleme propuse*

4. $n = 1{,}73$.

5. $A = 120°$.

BIBLIOGRAFIE

1. Auslander T., Macavei I., **Fizică generală şi nucleară**, Editura Didactică şi Pedagogică, Bucureşti, 1982.
2. Ceacâr Constantin, **Preparaţii de optică**, Editura Universităţii, 1997.
3. Ciobăniţa V., colectiv, **Radiorecepţia**, Editura Albatros, Bucureşti, 1982.
4. Ciobotaru D., colectiv, **Fizică – manual pentru clasa a XII-a**, Editura Didactică şi Pedagogică, Bucureşti, 1982.
5. Colecţia revistei **Evrica**, Brăila, 1995-2000.
6. Cone G., **Fizică – manual pentru clasa a XII-a**, Editura Plus, Bucureşti, 2002.
7. Creţu T.I., **Fizică – Teorie şi probleme**, vol. II, Editura Tehnică, Bucureşti, 1993.
8. Crowford jr. C., **Berkeley Physics Course, vol. III, Waves**, Editura Didactică şi Pedagogică, Bucureşti, 1983, traducere din limba engleză.
9. Durandeau J.P., colectiv, **Physique 1re S**, Hachette Education, Paris, 1998.
10. Durandeau J.P., colectiv, **Physique**, Term. S, Hachette Education, Paris, 1998.
11. Enescu G., colectiv, **Fizică – manual pentru clasa a XI-a**, Editura Didactică şi Pedagogică, Bucureşti, 1996.
12. Gugoiu I., Gugoiu T., **Teste grilă de fizică pentru Concursul de admitere la facultatea de Medicină**, Editura Datavision, Bucureşti, 1999.
13. Ionescu Andrei Rodica, Onea Cristina, Toma Ion, **Bacalaureat 2003 – Teste grilă de fizică**, Editura Plus, Bucureşti, 2003.
14. Iova I., Levai Şt., Iordache D., **Optica, fizica plasmei, fizica atomică şi nucleară pentru perfecţionarea profesorilor**, Editura Didactică şi Pedagogică, Bucureşti, 1983.
15. Kittel Ch., colectiv, **Cursul de fizică Berkeley**, vol. I, traducere din limba engleză, Editura Didactică şi Pedagogică, Bucureşti, 1981.
16. Krasilnikov V.A., **Unde Sonore**, Editura Tehnică, 1957, traducere din limba rusă.
17. Luca E., **Elemente de fizică modernă**, vol. I, Editura Lumina, Iaşi, 1974.
18. Oncescu M.A., **Fizica, nivel postliceal**, vol. I, Editura Didactică şi Pedagogică, Bucureşti, 1973.
19. Popa Sever; Ionescu Rodica; Popa Daniela, **Oscilaţii electromagnetice, Culegere de probleme pentru clasa a XI-a**, Editura Universităţii, 1994.
20. Popa Sever; Ionescu Rodica; Popa Daniela, **Oscilaţii mecanice, Culegere de probleme pentru clasa a XI-a**, Editura Media master, 1994.
21. Sears E.W., Zemansky M.W., Young H.D., **Fizică**, Editura Didactică şi Pedagogică, Bucureşti, 1983, traducere din limba engleză.
22. Semenescu Gh., colectiv, **Fizica atomică şi nucleară pentru reciclare postliceală**, Editura Tehnică, Bucureşti, 1977.
23. Shipman T.Y., Wilson J.D., **An introduction to Physical Science**, 6th edition, D.C. Heath and Company, 1990.
24. Silas Gh., colectiv, **Culegere de probleme de vibraţii mecanice**, Editura Tehnică, 1967.
25. Sima I., colectiv, **Dicţionar de fizică**, Editura Enciclopedică Română, Bucureşti, 1972.
26. Toader E.I., Spulber V., **555 teste de optică**, Editura Didactică şi Pedagogică, Bucureşti, 1989.
27. Uliu Florea, **Probleme alese de fizică, vol. II, Optică şi relativitate**, Editura Radical, Craiova, 1996.
28. Văducă Gh., colectiv, **Probleme de fizică pentru clasele XI-XII**, Editura Didactică şi Pedagogică, Bucureşti, 1983.
29. Vorobiov I.I., colectiv, **Zadaci po fizike**, Izdatelstovo Nauka, 1988.

CUPRINS

Cap. I **OSCILAȚII ȘI UNDE MECANICE** 5

1.1 OSCILATORUL MECANIC 5

1.1.1 Fenomene periodice. Procese oscilatorii în natură și în tehnică 5

1.1.2 Mărimi caracteristice mișcării oscilatorii 6

1.1.2.1 Cinematica mișcării oscilatorii liniar armonice 7

1.1.2.2 Studiul experimental al unor procese oscilatorii libere simple 15

1.1.3 Descrierea cantitativă din punct de vedere energetic a oscilatorului armonic 20

1.1.4 Oscilator mecanic liber cu frecare. Amortizarea 24

1.1.5 Compunerea oscilațiilor 26

1.1.5.1 Compunerea a două oscilații armonice paralele și de aceeași frecvență 26

1.1.5.2* Compunerea oscilațiilor paralele cu frecvențe puțin diferite. Fenomenul de bătăi 28

1.1.5.3 Compunerea oscilațiilor perpendiculare 30

1.2 OSCIALTORI MECANICI CUPLAȚI 32

1.2.1 Oscilații întreținute. Oscilații forțate 32

1.2.2 Rezonanța 33

1.2.3 Consecințe și aplicații 35

1.3 UNDE MECANICE. PROPAGAREA UNDELOR MECANICE 37

1.3.1 Propagarea unei perturbații într-un mediu elastic. Transferul de energie 37

1.3.2 Modelul „unda plană". Periodicitatea spațială și temporală 44

1.3.3 Reflexia și refracția undelor mecanice 47

1.3.4 Unde seismice 52

1.3.5 Interferența undelor mecanice. Unde staționare 54

1.3.5.1 Interferența undelor sinusoidale 55

1.3.5.2 Unde staționare 58

1.3.6 Acustica 61

1.3.7* Difracția undelor mecanice 65

1.3.8 Ultrasunete și infrasunete. Aplicații în medicină, industrie și tehnică militară 67

Cap. II **OSCILAȚII ȘI UNDE ELECTROMAGNETICE** 71

2.1 OSCILAȚII ELECTROMAGNETICE LIBERE 71

2.1.1 Descărcarea unui condensator (C) printr-o bobină ideală (L) 71

2.1.2 Descărcarea unui condensator (C) printr-o bobină reală (L, r) 77

2.2 CIRCUITUL R, L, C ÎN CURENT ALTERNATIV 80

2.2.1 Circuitul serie (R, L, C) în curent alternativ 80

2.2.2 Analiza și descrierea din punct de vedere energetic a funcționării circuitelor de curent alternativ 93

2.2.3* Rezolvarea rețelelor de curent alternativ 98

2.2.4* Circuitul paralel bobină-condensator. Rezonanța circuitului paralel 101

2.2.5 Funcționarea în regim de rezonanță a unor circuite de curent alternativ 105

2.3 CÂMPUL ELECTROMAGNETIC. UNDA ELECTROMAGNETICĂ 107
2.3.1 Câmpul electromagnetic 107
2.3.2 Propagarea câmpului electromagnetic 109
2.3.3 Unda electromagnetică plană. Utilizarea relațiilor dintre mărimile caractristice 111
2.4 CLASIFICAREA UNDELOR ELECTROMAGNETICE 113
2.5 APLICAȚII 115
2.5.1 Explicarea calitativă a utilizării undelor electromagnetice în funcționarea radioului și televiziunii 115
2.5.2 Alte aplicații ale undelor electromagnetice 117

Cap. III OPTICA ONDULATORIE 119
3.1 DISPERSIA LUMINII 119
3.1.1 Interpretarea electromagnetică a dispersiei. Aplicarea în știință și tehnică a fenomenului de dispersie 120
3.2 INTERFERENȚA LUMINII 122
3.3 DISPOZITIVUL LUI YOUNG 124
3.4 INTERFERENȚA LOCALIZATĂ. APLICAȚII 126
3.4.1 Alte dispozitive interferențiale 128
3.5* DIFRACȚIA LUMINII 133
3.6* REȚEAUA DE DIFRACȚIE. APLICAȚII 135
3.7* POLARIZAREA LUMINII 138

Cap. IV ELEMENTE DE TEORIA HAOSULUI 145
4.1* DETERMINISM ȘI PREDICTIBILITATE. CONDIȚII. MODELE 145
4.2* DETERMINISM ȘI IMPREDICTIBILITATE. COMPORTAMENTUL HAOTIC. CONDIȚII 145
4.3* DESCRIEREA COMPORTAMENTULUI HAOTIC. SPAȚIUL FAZELOR. ATRACTORI CLASICI ȘI STRANII 147
4.3.1 Spațiul fazelor 147
4.3.2 Atractori clasici și stranii 148
4.4* ELEMENTE DE GEOMETRIE FRACTALĂ 150
4.4.1 Caracteristicile unui fractal 151
4.4.2 Tipuri de fractali 152

RĂSPUNSURI 156

BIBLIOGRAFIE 158

FIZICĂ F1 - MANUAL PENTRU CLASA A XI - A